Primtalssatsen

Alexander Kainberg

Handledare: Hans-Olav Tylli

HELSINGIN YLIOPISTO — HELSINGFORS UNIVERSITET — UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta/Osasto — Fakultet/Sektion — Faculty	Laitos — Institution — Department
Matematisk-naturvetenskapliga	Institutionen för matematik och statistik

Tekijä — Författare — Author
Tuomas Alexander Kainberg

Työn nimi — Arbetets titel — Title
Primtalssatsen

Oppiaine — Läroämne — Subject
Matematik

Työn laji — Arbetets art — Level	Aika — Datum — Month and year	Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages
Pro gradu	November 2012	75 s.

Tiivistelmä — Referat — Abstract

I slutet av 1700-talet gissade Gauss och Legendre att

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log(x)}{x} = 1,$$

där $\pi(x)$ är antalet primtal som är mindre än eller lika med x. Hadamard och de la Vallée Poussin bevisade påstående oberoende av varandra år 1896 och resultatet kallas numera *primtalssatsen*. Efter detta har satsen bevisats på både elementära sätt (Selberg & Erdõs, 1949) och med hjälp av komplexanalys (Newman, 1980).

I denna avhandling kommer vi att presentera ett analytiskt bevis av PTS. I beviset kommer vi att utnyttja *Riemanns zetafunktion* och dess egenskaper. I kapitel 3 behandlar vi komplexanalys. Vi diskuterar bl.a. *Eulers gammafunktion*, Riemanns zetafunktion och *Dirichletserier*. Det är en naturlig fortsättning till PTS att diskutera zetafunktionens nollställen, och därför bevisar vi *Hardys sats*. Efter detta kommer vi att presentera den ökända *Riemannhypotesen*.

Gauss gissade att den *logaritmiska integralen*

$$\mathrm{Li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\log t}$$

skulle approximera $\pi(x)$ mycket bra. Vi definierar den s.k. restfunktionen som $r(x) := \pi(x) - \mathrm{Li}(x)$. Vi avslutar avhandlingen genom att bevisa att om det för varje $\epsilon > 0$ gäller att $|r(x)| < x^{\frac{1}{2}+\epsilon}$ så är Riemannhypotesen sann.

Avainsanat — Nyckelord — Keywords
Primtalssatsen, ζ-funktionen, Hardys sats, Riemannhypotesen

Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited
Campusbiblioteket i Gumtäkt

Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information

Innehåll

Tack

Jag vill börja med att tacka min handledare Hans-Olav Tylli som hjälpt mig på traven och läst många versioner av denna avhandling. Jag vill även tacka mina lärare i Borgå Gymnasium, Dick Kullberg, Anna-Lena Juslin och framför allt Christer Sandvik som väckte mitt intresse för matematik. Dessutom vill jag tacka mina föräldrar, som stött mig under alla dessa år. Jag vill ödmjukast tacka alla mina vänner, inte enbart vid universitetet. Speciellt vill jag tacka Gustaf Lönn, som utöver allt annat hjälpte mig med det tekniska, och bilderna i kap. 5.

Man bör minnas att det finns annat än matematik i livet. Tack Antonia von Etter.

Kapitel 1

Inledning

Definition 1.1. Ett *primtal* p är ett naturligt tal vars enda delare är 1 och p.

Sedan urminnes tider har primtalen $\{2, 3, 5 \ldots\}$ fascinerat matematiker världen över. Det finns tecken på att egyptierna visste något om primtal och grekerna, med Euklides i spetsen, visste ännu mer om dem. Det går bl.a. lätt att visa att det finns oändligt många primtal (se Bilaga A).Eftersom vi vet att det finns oändligt många primtal är vi intresserade av att veta hur ofta de förekommer. Det visar sig att relativt många tal är primtal.

Sats 1.2. *Låt $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, ...\}$ vara mängden av primtal i växande ordning. Då har vi att*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k} = \infty.$$

För bevis, se Bilaga A. Vi vet att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \quad \text{och} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty.$$

Sats 1.2 innebär alltså att primtal förekommer betydligt oftare än kvadrater och då erhåller vi alltså i synnerhet ett nytt bevis till att det finns oändligt många primtal.

Den franska matematikern *Joseph Bertrand* postulerade år 1845 att om n är ett positivt heltal så existerar det minst ett primtal p så att $n < p \leq 2n$. Påståendet bevisades år 1850 av Chebyshev, och kallas numera *Chebyshevs sats*. Resultatet är ganska svagt eftersom det t.ex. mellan talen 50 och 100 finns primtalen $53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89$ och 97. Hur ofta förekommer primtalen?

Vi definierar $\pi(x)$ som antalet primtal som är mindre än $x > 0$, d.v.s.

Definition 1.3. Om $x > 0$ är ett reellt tal, så definieras

$$\pi(x) = \#\{p |\ p \leq x,\ p \text{ är ett primtal}\}.$$

I slutet av 1700-talet gissade Gauss och Legendre att

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log(x)}{x} = 1.$$

Hadamard och de la Vallée Poussin bevisade påståendet oberoende av varandra år 1896. Numera kallas resultatet *primtalssatsen*. Efter detta har satsen bevisats på både elementära sätt (Selberg & Erdõs, 1949) samt genom komplexanalys (Newman, 1980). I denna avhandling bevisar vi primtalssatsen med hjälp av komplexanalys, genom att utnyttja Riemanns ζ-funktion, och dess egenskaper. Beviset som presenteras är mycket konkret jämfört med andra, aningen kortare bevis. [Apo] har använts som huvudsaklig källa. Vi kommer dessutom att diskutera zetafunktionens nollställen.

Fördelningen av primtal är djupt sammanknuten med Riemannhypotesen, vilken vi diskuterar i ett senare kapitel. Vi avslutar avhandlingen genom att presentera ett förvånande samband mellan zetafunktionens nollställen och fördelningen av primtal ur [Nev].

Kapitel 2

Bakgrund och ekvivalenta reformuleringar av PTS

Syftet med detta kapitel är att introducera några väsentliga talteoretiska funktioner $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. I kapitel 4 bevisar vi primtalssatsen genom att bevisa ett ekvivalent påstående (Sats 2.10). För att bevisa reformuleringen behöver vi ett antal resultat, som i sig själva är intressanta. Resultaten finns bl.a. i [LeV] och [Apo].

Vi börjar med att definiera von Mangoldts funktion $\Lambda(n)$:

Definition 2.1. Låt n $\in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{om } n = p^m \text{ för något primtal } p \text{ och } m \geq 1, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

I mitten av 1800-talet introducerade Chebyshev sin ψ-funktion:

Definition 2.2. Låt $x > 0$. Vi definierar Chebyshevs ψ-funktion enligt

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n).$$

I och med att $\Lambda(n) = 0$ om n inte är en potens av något primtal kan vi skriva om definitionen för $\psi(x)$ som

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{p \\ p^m \leq x}} \Lambda(p^m) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p \leq x^{1/m}} \log p.$$

I själva verket är summan över m en ändlig summa, nämligen summeringen över p är tom om $x^{1/m} < 2$, d.v.s då

$$m > \frac{\log x}{\log 2} = \log_2 x.$$

Vi får alltså att

$$\psi(x) = \sum_{m \le \log_2 x} \sum_{p \le x^{1/m}} \log p.$$

Detta kan skrivas i en annan form genom att introducera en ny funktion.

Definition 2.3. Om $x > 0$ definierar vi Chebyshevs ϑ-funktion genom

$$\vartheta(x) = \sum_{p \le x} \log p.$$

Nu kan vi skriva om $\psi(x)$ som

$$\psi(x) = \sum_{m \le \log_2 x} \vartheta(x^{1/m}).$$

Följande resultat ger ett samband mellan funktionerna $\psi(x)$ och $\vartheta(x)$.

Lemma 2.4. *Låt $x > 0$. Då gäller att*

$$0 \le \frac{\psi(x)}{x} - \frac{\vartheta(x)}{x} \le \frac{(\log x)^2}{2\sqrt{x}\log 2}.$$

Anmärkning 2.5. Lemma 2.4 implicerar speciellt att

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{\psi(x)}{x} - \frac{\vartheta(x)}{x} \right) = 0.$$

Bevis. Definitionen av $\psi(x)$ ger att

$$0 \le \psi(x) - \vartheta(x) = \sum_{m \le \log_2 x} \vartheta(x^{1/m}) - \vartheta(x) = \sum_{2 \le m \le \log_2 x} \vartheta(x^{1/m}).$$

Å andra sidan ger definitionen av $\vartheta(x)$ att

$$\vartheta(x) \le \sum_{p \le x} \log x \le x \log x,$$

varav

$$\begin{aligned} 0 \le \psi(x) - \vartheta(x) &\le \sum_{2 \le m \le \log_2 x} x^{1/m} \log(x^{1/m}) \le (\log_2 x)\sqrt{x} \log \sqrt{x} \\ &= \frac{\log x}{\log 2} \cdot \frac{\sqrt{x}}{2} \log x = \frac{\sqrt{x}(\log x)^2}{2 \log 2}. \end{aligned}$$

Division med x ger påståendet.

□

Sats 2.6. ***(Abels lemma)*** *Låt $a(n)$ vara en talteoretisk funktion. Låt*

$$A(x) = \sum_{n \le x} a(n),$$

där $A(x) = 0$ om $x < 1$. Antag att $f : [x, y] \to \mathbb{C}$ har en kontinuerlig derivata i intervallet $[y, x]$, där $0 < y < x$. Då gäller att

$$\sum_{y<n\le x} a(n)f(n) = A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_y^x A(t)f'(t)dt.$$

Bevis. Låt $k = \lfloor x \rfloor$ och $m = \lfloor y \rfloor$, så att $A(x) = A(k)$ och $A(y) = A(m)$. Då gäller att

$$\begin{aligned}
\sum_{y<n\le x} a(n)f(n) &= \sum_{n=m+1}^{k} a(n)f(n) = \sum_{n=m+1}^{k} \{A(n) - A(n-1)\} f(n) \\
&= \sum_{n=m+1}^{k} A(n)f(n) - \sum_{n=m}^{k-1} A(n)f(n+1) \\
&= \sum_{n=m+1}^{k-1} [A(n) \{f(n) - f(n+1)\}] + A(k)f(k) - A(m)f(m+1) \\
&= -\sum_{n=m+1}^{k-1} A(n) \left(\int_n^{n+1} f'(t)dt \right) + A(k)f(k) - A(m)f(m+1) \\
&= -\sum_{n=m+1}^{k-1} \int_n^{n+1} A(t)f'(t)dt + A(k)f(k) - A(m)f(m+1) \\
&= -\int_{m+1}^{k} A(t)f'(t)dt + A(x)f(x) - \int_k^x A(t)f'(t)dt \\
&\quad - A(y)f(y) - \int_y^{m+1} A(t)f'(t)dt \\
&= A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_y^x A(t)f'(t)dt.
\end{aligned}$$

□

Abels lemma implicerar följande sats, som kommer att användas senare i kap. 3.

Sats 2.7. ***(Eulers summaformel)*** *Om funktionen $f : [x,y] \to \mathbb{C}$ har en kontinuerlig derivata f' i intervallet $[y,x]$, där $0 < y < x$, så gäller det att*

$$\sum_{y<n\le x} f(n) = \int_y^x f(t)dt + \int_y^x (t - \lfloor t \rfloor) f'(t)dt + f(x)(\lfloor x \rfloor - x) - f(y)(\lfloor y \rfloor - y).$$

Bevis. Låt $a(n) = 1$ för alla $n \ge 1$. Vi noterar att $A(x) = \lfloor x \rfloor$ och Sats 2.6 ger att

$$\sum_{y<n\le x} f(n) = f(x)\lfloor x \rfloor - f(y)\lfloor y \rfloor - \int_y^x \lfloor t \rfloor f'(t)dt.$$

Påståendet i Sats 2.7 följer ur formeln för partiell integration:

$$\int_y^x t f'(t)dt = x f(x) - y f(y) - \int_y^x f(t)dt.$$

□

Vi använder Abels lemma för att uttrycka $\vartheta(x)$ och $\pi(x)$ med hjälp av lämpliga integraler.

Sats 2.8. *Låt $x \ge 2$. Då gäller att*

(i)

$$\vartheta(x) = \pi(x)\log x - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt$$

och

(ii)

$$\pi(x) = \frac{\vartheta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t \log^2 t} dt.$$

Bevis. Låt $\chi(n)$ vara primtalens karakteristiska funktion, alltså

$$\chi(n) = \begin{cases} 1 & \text{om } n \text{ är ett primtal,} \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Då har vi att

$$\pi(x) = \sum_{p \le x} 1 = \sum_{1<n\le x} \chi(n) \quad \text{och} \quad \vartheta(x) = \sum_{p\le x} \log p = \sum_{1<n\le x} \chi(n) \log n.$$

Låt $f(x) = \log x$ och $y = 1$. Enligt Sats 2.6 får vi nu att

$$\begin{aligned}\vartheta(x) &= \sum_{1<n\leq x} \chi(n)\log(n) = \pi(x)\log(x) - \pi(1)\log(1) - \int_1^x \frac{\pi(t)}{t}dt \\ &= \pi(x)\log(x) - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t}dt,\end{aligned}$$

vilket bevisar (i).

Låt $\chi'(n) = \chi(n)\log(n)$. Nu kan vi skriva

$$\pi(x) = \sum_{3/2<n\leq x} \frac{\chi'(n)}{\log(n)} \quad \text{och} \quad \vartheta(x) = \sum_{n\leq x} \chi'(n).$$

Vi tillämpar Sats 2.6 på nytt med $f(x) = 1/\log x$ och $y = 3/2$. Eftersom $f'(x) = -1/x\log^2 x$ erhåller vi

$$\begin{aligned}\pi(x) &= \frac{\vartheta(x)}{\log x} - \frac{\overbrace{\vartheta(3/2)}^{=0}}{\log 3/2} + \int_{3/2}^x \frac{\vartheta(t)}{t\log^2 t}dt \\ &= \frac{\vartheta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t\log^2 t}dt.\end{aligned}$$

□

Definition 2.9. Låt $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara funktioner. Vi säger att $f(x) = O(g(x))$ då $x \to \infty$ om och endast om det existerar en konstant $M \geq 0$ och ett tal x_0 så att $|f(x)| \leq M|g(x)|$ för alla $x > x_0$.

Nu är vi färdiga att bevisa kapitlets huvudsats.

Sats 2.10. *Följande villkor är ekvivalenta:*

(i)
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} = 1,$$

(ii)
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\vartheta(x)}{x} = 1,$$

(iii)
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1.$$

Bevis. Sats 2.8 ger direkt att

$$\frac{\vartheta(x)}{x} = \frac{\pi(x)\log x}{x} - \frac{1}{x}\int_2^x \frac{\pi(t)}{t}dt$$

och

$$\frac{\pi(x)\log x}{x} = \frac{\vartheta(x)}{x} + \frac{\log x}{x}\int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t\log^2 t}dt.$$

$(i) \Rightarrow (ii)$: Det räcker att visa att (i) implicerar

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_2^x \frac{\pi(t)}{t}dt = 0.$$

Observera att (i) implicerar att $\frac{\pi(t)}{t} = O(\frac{1}{\log t})$ då $t \geq 2$, varav

$$\frac{1}{x}\int_2^x \frac{\pi(t)}{t}dt = O(\frac{1}{x}\int_2^x \frac{dt}{\log t}).$$

Eftersom $t \mapsto 1/\log t$ är en avtagande funktion får vi att

$$\int_2^x \frac{dt}{\log t} = \int_2^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\log t} + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{dt}{\log t} \leq \frac{\sqrt{x}}{\log 2} + \frac{x-\sqrt{x}}{\log\sqrt{x}},$$

vilket leder till att

$$\frac{1}{x}\int_2^x \frac{\pi(t)}{t}dt \to 0 \quad \text{då} \quad x \to \infty.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$: Vi bör visa att (ii) implicerar

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x}\int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t\log^2 t}dt = 0.$$

Notera att villkor (ii) implicerar att $\vartheta(x) = O(t)$, varav

$$\frac{\log x}{x}\int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t\log^2 t}dt = O(\frac{\log x}{x}\int_2^x \frac{dt}{\log^2 t}).$$

Dessutom får vi att

$$\int_2^x \frac{dt}{\log^2 t} = \int_2^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\log^2 t} + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{dt}{\log^2 t} \leq \frac{\sqrt{x}}{\log^2 2} + \frac{x-\sqrt{x}}{\log^2\sqrt{x}},$$

vilket ger att

$$\frac{\log x}{x}\int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t\log^2 t}dt \to 0 \quad \text{då} \quad x \to \infty.$$

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$: Klart från Lemma 2.4.

$\square$

Definition 2.11. Låt $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara funktioner. Vi säger att $f(x) \sim g(x)$ om $f(x)/g(x) \to 1$ då $x \to \infty$.

Ur Sats 2.10 får vi att primtalssatsen är ekvivalent med att $\psi(x) \sim x$ då $x \to \infty$. Vi kommer att bevisa detta påstående i kap. 4.

Kapitel 3

Komplexanalys

I detta kapitel presenterar vi de nödvändiga resultaten som behövs för att bevisa primtalssatsen. Bevisen förbigås eftersom de är standardverktyg inom komplexanalysen. Bevis finns t.ex. i [Ast], [Sak] och [Ahl]. Vi börjar med att presentera *Eulers formel*:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Definition 3.1. Låt $z \in \mathbb{C}$. Då definierar vi sin, cos, sinh och cosh enligt

(i)
$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}),$$

(ii)
$$\sin z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}),$$

(iii)
$$\sinh z = \frac{1}{2}(e^{z} - e^{-z}),$$

(iv)
$$\cosh z = \frac{1}{2}(e^{z} + e^{-z}).$$

Definition 3.2. Om $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ är w:s logaritm $\log w$ något tal $z \in \mathbb{C}$ för vilket $e^z = w$. Om $w = re^{i\phi}$, $r > 0$, så definierar vi

$$\log w = \log r + i\phi + 2n\pi i = \log |w| + i \arg w + 2n\pi i,$$

där $n \in \mathbb{Z}$. Om n är fixerat och om vi tillåter ϕ att variera inom ett intervall med längden 2π får vi en entydig funktion som kallas för en *gren* av logaritmen. Om $n = 0$ kallas grenen i fråga *principalgrenen*.

Definition 3.3. Låt $A \subset \mathbb{C}$ vara icke-tom och öppen, och låt $f : A \to \mathbb{C}$ vara en funktion.

(i) Om $z_0 \in intA$ så har funktionen f derivatan $f'(z_0)$ i punkten z_0 om gränsvärdet

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

existerar.

(ii) f är analytisk i punkten z_0 om det existerar en öppen kula $D(z_0, r) \subset A$ så att f har en derivata i varje $z \in D(z_0, r)$.

(iii) f är analytisk i A om f är analytisk i varje punkt $z \in A$.

Definition 3.4. En funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ är *hel* om den är analytisk i hela $\mathbb{C}$.

Definition 3.5. Låt $U \subset \mathbb{C}$ vara ett område och låt $f : U \to \mathbb{C}$ vara analytisk. Om V är ett område så att $U \subset V$, $g : V \to \mathbb{C}$ är analytisk och

$$g|U = f,$$

så kallas g den *analytiska fortsättningen* av f till V. Dessutom är g entydig.

Definition 3.6. En kontinuerlig avbildning $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, där $a, b \in \mathbb{R}$ och $a < b$, kallas en *stig.*

Definition 3.7. Låt $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ vara en deriverbar stig i mängden $A \subset \mathbb{C}$. Om $f : A \to \mathbb{C}$ är kontinuerlig definierar vi integralen av f över stigen γ som

$$\int_\gamma f dz = \int_\gamma f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt.$$

Definition 3.8. Låt $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ vara en stig. Stigens *spår* är $|\gamma| = \{\gamma(t)|t \in [a, b]\} \subset \mathbb{C}$.

Definition 3.9. Låt γ vara en stig. Stigens *omloppstal* kring punkten $a \in \mathbb{C}\backslash|\gamma|$ definieras som

$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z - a}.$$

Sats 3.10. ***(Cauchys sats)*** *Låt $A \subset \mathbb{C}$ vara ett område och låt $f : A \to \mathbb{C}$ vara analytisk. Låt γ vara en stig i A (d.v.s. $|\gamma| \subset A$) för vilken $n(\gamma, a) = 0$ för alla $a \in \mathbb{C} \setminus A$. Då gäller att*

$$n(\gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in A \setminus |\gamma|$$

och

$$\int_\gamma f(\zeta) d\zeta = 0.$$

Sats 3.11. ***(Laurent)*** *Låt f vara analytisk i $A = \{z : r < |z - z_0| < R\}$, där $0 \le r < R < \infty$. För varje $z \in A$ gäller att*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

där

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,\rho)} \frac{f(\varepsilon)}{(\varepsilon - z_0)^{n+1}} d\varepsilon, \quad \rho \in (r, R).$$

Definition 3.12. Anta att f är analytisk i $B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$, och låt

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < r,$$

vara dess Laurent serieutveckling i z_0. Anta att $f \not\equiv 0$. Funktionen f kan bete sig på tre olika sätt i z_0:

1. Om $a_n = 0$ då $n < n_0$, där $n_0 \ge 0$, så är z_0 en *hävbar singularitet*, och genom att sätta $f(z_0) = a_0$ erhåller vi en analytisk funktion i $B(z_0, r)$.

2. Om $a_n = 0$ då $n < -n_0$, där $n_0 > 0$, så är z_0 en *pol* av ordningen n_0.

3. Om det inte existerar något tal n_0 för vilket $a_n = 0$ då $n < n_0$, så är z_0 en *väsentlig singularitet*.

Definition 3.13. Antag att situationen är som i föregående definition. *Residyn* av f i z_0 är a_{-1}, vilket vi betecknar

$$a_{-1} = \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \operatorname{Res}(f(z); z_0).$$

Lemma 3.14. $\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z)$ *är det entydiga talet B för vilket funktionen $f(z) - \frac{B}{z-z_0}$ har en väldefinierad integralfunktion i $B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ för något $r > 0$.*

Lemma 3.15. *Anta att f har en pol av 1. ordningen i z_0. Då gäller att*

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

Sats 3.16. ***(Residysatsen)*** *Antag att f är analytisk innanför och på en enkel sluten kurva γ förutom i ändligt många punkter $z_1 \ldots z_k$. Då gäller att*

$$\int_\gamma f(z) dz = 2\pi i \sum_{n=1}^{k} n(\gamma, z_n) \operatorname{Res}(f(z); z_n).$$

Lemma 3.17. *Låt $A \subset \mathbb{R}^n$ vara sluten, och låt $U \subset \mathbb{C}$ vara ett område. Anta att $g : A \times U \to \mathbb{C}$ är kontinuerlig och att avbildningen $z \mapsto g(a,z)$ är analytisk för varje fixerat $a \in A$. Anta att varje $z_0 \in U$ har en omgivning $B(z_0, r)$ så att $|g(x,z)| \leq h(x)$ för varje $(x,z) \in A \times B(z_0, r)$, där $\int_A h(x)dx < \infty$. Då är funktionen*

$$f(z) = \int_A g(x,z)dx$$

analytisk i U och vidare gäller att $f'(z) = \int_A \frac{d}{dz} g(x,z)dx$.

Lemma 3.18. *Om summan $\sum_{j=1}^{\infty} |f_n(z)|$ konvergerar likformigt i området $\Omega \subset \mathbb{C}$ och om varje f_n är analytisk så konvergerar produkten*

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + f_n(z))$$

i Ω och $F(z)$ är analytisk i Ω. Om $f_n(z) \neq -1$ för varje $n \geq 1$ så är $F(z) \neq 0$.

Sats 3.19. ***(Riemann-Lebesgues lemma)*** *Antag att $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är en mätbar funktion för vilken $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty$. Då gäller att*

$$\lim_{x \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{itx} dt = 0.$$

3.1 Gammafunktionen

Eulers gammafunktion Γ är i sig mycket intressant, men vi nöjer oss med att endast presentera några väsentliga resultat som vi kommer att använda i kapitel 4. [Sak] har använts som huvudsaklig källa. Gammafunktionen är starkt förknippad med fakultetsfunktionen. Följande definition berör analytisk fortsättning.

Definition 3.20. Funktionen f är *meromorfisk* i området $\Omega \subset \mathbb{C}$ om det existerar en mängd $A \subset \Omega$ för vilken

(i) A saknar anhopningspunkter i Ω,

(ii) f är analytisk i $\Omega \setminus A$,

(iii) f har en pol i varje punkt $z \in A$.

Definition 3.21. Låt $x \in \mathbb{R}$ och $x > 0$. Vi definierar gammafunktionen som

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Vi kan utsträcka definitionen av Γ till hela komplexa talplanet $\mathbb{C}$. Följande sats är speciellt viktig.

Sats 3.22. *(i) Formeln*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

definierar en analytisk funktion i högra halvplanet $\{z : Re\ z > 0\}$.

(ii) För $Re\ z > 0$ gäller att

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

(iii) Funktionalekvationen (ii) definierar en analytisk fortsättning av Γ till området $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$. Dessutom är $\{0, -1, -2, \dots\}$ poler av 1. ordningen och speciellt är Γ meromorfisk i hela $\mathbb{C}$.

(iv) $\Gamma(n+1) = n!$.

Bevis. (i) För varje fixerat $t > 0$ är avbildningen $z \mapsto e^{-t}t^{z-1}$ analytisk i $\operatorname{Re} z > 0$. I området $G_n = \{z | \frac{1}{n} < \operatorname{Re} z < n\}$ hittar vi en integrerbar majorant:

$$|e^{-t}t^{z-1}| = e^{-t}t^{\operatorname{Re} z - 1} \leq e^{-t}(t^{\frac{1}{n}-1} + t^{n-1}).$$

Påståendet följer ur Lemma 3.17.

(ii) Partiell integrering ger

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t}t^z dt = \lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ M \to \infty}} - \Big/_{\epsilon}^{M} e^{-t}t^z + z\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt = z\Gamma(z).$$

(iii-iv) Om $n \geq 1$ kan vi använda *(ii)* upprepat, och får att

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} \tag{3.23}$$

om $\operatorname{Re} z > 0$. Påståendet i *(iv)* följer omedelbart. Högra sidan är analytisk i $U_n = \{z | \operatorname{Re} z > -n, z \neq 0, -1, -2, \dots\}$, och ger en analytisk fortsättning av Γ till U_n. Eftersom n är godtyckligt och fortsättningen till $U_n \cup U_m$, $(n < m)$, sammanfaller, får vi alltså en analytisk fortsättning till $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$.

Eftersom $\Gamma(x) > 0$ då $x > 0$ ser vi ur (3.23) att $\Gamma(z)$ har poler av 1. ordningen i $z = 0, -1, -2, \dots$

□

Anmärkning 3.24. Vi kan även ekvivalent definiera gammafunktionen som

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n},$$

där

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right) \approx 0,57722$$

är *Eulers konstant*. Beviset förbigås, se exempelvis [Ahl] s.198.

Sats 3.25.

$$\operatorname*{Res}_{z=-n} \Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Bevis. Enligt (3.15) vet vi att

$$\operatorname*{Res}_{z=-n} \Gamma(z) = \lim_{z\to -n} (z+n)\Gamma(z).$$

Ur (3.23) får vi att

$$(z+n)\Gamma(z) = \frac{(z+n)\Gamma(z+n)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}, \ \operatorname{Re} z > -n.$$

Då vi låter $z \to -n^+$ får vi att

$$\operatorname*{Res}_{z=-n} \Gamma(z) = \frac{\Gamma(1)}{(-1)^n n!} = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

□

Lemma 3.26. *Låt* $0 < u < 1$. *Då gäller att*

$$\int_0^\infty \frac{x^{u-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin(\pi u)}.$$

Bevis. Vi betraktar analytiska funktionen $f(z) := z^{u-1}/(1+z)$ där $z \in \mathbb{C}\setminus([0,\infty]\cup\{-1\})$. z^{u-1} är alltså grenen som närmar sig $x^{u-1} \in \mathbb{R}$ när z går mot $x \in (0,\infty)$ ovanifrån. Vi definierar $\arg z$ entydigt i $\mathbb{C} \setminus [0,\infty)$ genom att sätta $0 < \arg z < 2\pi$, och

$$z^{u-1} = |z|^{u-1} \exp((u-1)i \arg z).$$

Nu är f analytisk i $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ och meromorfisk i samma område, med en pol i $z = -1$. Det gäller att

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z) &= \lim_{z \to -1} (z+1) f(z) = \lim_{z \to -1} z^{u-1} \\ &= |-1|^{u-1} \exp((u-1)i\pi) = -e^{ui\pi}.\end{aligned}$$

Låt $0 < r < 1 < R$ och låt $\epsilon > 0$ vara tillräckligt litet. Vi definierar stigen $\gamma_{\epsilon,r,R}$ i $\mathbb{C} \setminus ([0, \infty] \cup \{-1\})$ genom att sätta

$$\gamma_{\epsilon,r,R} = \alpha_{\epsilon,r,R} + B_{\epsilon,R} + \overline{\alpha}_{\epsilon,r,R} + \overline{B}_{\epsilon,R},$$

där

- $\alpha_{\epsilon,r,R}$ är linjesegmentet som sträcker sig från $re^{i\epsilon}$ till $Re^{i\epsilon}$,
- $\overline{\alpha}_{\epsilon,r,R}$ är linjesegmentet som sträcker sig från $Re^{-i\epsilon}$ till $re^{-i\epsilon}$,
- $B_{\epsilon,R}$ är stigen $[\epsilon, 2\pi - \epsilon] \ni t \mapsto Re^{it}$ (alltså en del av cirkeln $\partial B(0, R)$ med positiv riktning),
- $\overline{B}_{\epsilon,r}$ är stigen $[\epsilon, 2\pi - \epsilon] \ni t \mapsto re^{i(2\pi - t)}$ (alltså en del av cirkeln $\partial B(0, r)$ med negativ riktning).

$\gamma_{\epsilon,r,R}$ är alltså en enkel sluten kurva och $n(\gamma_{\epsilon,r,R}, -1) = 1$.

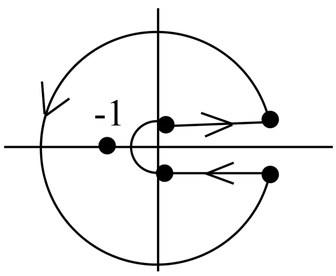

Bild 1. Integrationsstigen $\gamma_{\epsilon,r,R}$.

Residysatsen ger nu att

$$\int_{\gamma_{\epsilon,r,R}} f(z)dz = -2\pi i e^{ui\pi}. \tag{3.27}$$

Nu vill vi beräkna gränsvärden då $\epsilon \to 0^+$ för $\int_{\alpha_{\epsilon,r,R}}$ och $\int_{\overline{\alpha}_{\epsilon,r,R}}$. Om vi definierar $\arg z = 0$ då $z \in [r, R]$ ger den föregående definitionen en fortsättning av f som en likformigt kontinuerlig funktion i $\{z : r \leq |z| \leq R, 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}\}$. Speciellt är $f(x) = x^{u-1}/(1+x)$ om $x \in [r, R]$. Likformig kontinuitet ger att

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\alpha_{\epsilon,r,R}} f(z)dz = \int_r^R \frac{x^{u-1}}{1+x} dx.$$

På motsvarande sätt, genom att sätta $\arg z = 2\pi$ då $z \in [r, R]$ ger den föregående definitionen en fortsättning av f som en likformigt kontinuerlig funktion i $\{z : r \leq |z| \leq R, \frac{3\pi}{2} \leq \arg z \leq 2\pi\}$. Vi erhåller att

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\overline{\alpha}_{\epsilon,r,R}} f(z)dz = -\int_r^R \frac{x^{u-1}e^{i2\pi(u-1)}}{1+x} dx = -e^{2\pi iu} \int_r^R \frac{x^{u-1}}{1+x} dx.$$

Likformig kontinuitet på $\partial B(0, r) \setminus \{r\}$ och $\partial B(0, R) \setminus \{R\}$ ger att integralerna över cirklarna är väl-definierade. Vi erhåller att

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{B_{\epsilon,R}} f(z)dz = \int_{\partial B(0,R)} f(z)dz = I_R,$$

och

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\overline{B}_{\epsilon,r}} f(z)dz = -\int_{\partial B(0,r)} f(z)dz = -I_r,$$

där integrationen sker moturs. Vi kan alltså låta $\epsilon \to 0^+$ i (3.27) och då vi kombinerar våra observationer erhåller vi att

$$-2\pi i e^{ui\pi} = \left(1 - e^{2\pi iu}\right) \int_r^R \frac{x^{u-1}}{1+x} dx + I_R - I_r. \tag{3.28}$$

Vi observerar att $|f(z)| \leq 2r^{u-1}$ om $0 < r < \frac{1}{2}$, och får att

$$|I_r| \leq 2\pi r \cdot 2r^{u-1} = 4\pi r^u \overset{r \to 0^+}{\to} 0.$$

Å andra sidan ser vi att $|f(z)| \leq \frac{R^{u-1}}{R-1} \leq 2R^{u-2}$ om $R > 2$, och erhåller att

$$|I_R| \leq 2\pi R \cdot 2R^{u-1} = 4\pi R^{u-1} \overset{R \to \infty}{\to} 0.$$

Då vi kombinerar våra observationer och låter $r \to 0^+$ och $R \to \infty$ i (3.28) erhåller vi slutligen att

$$-2\pi i e^{ui\pi} = \left(1 - e^{2\pi iu}\right) \int_0^\infty \frac{x^{u-1}}{1+x} dx.$$

Förenkling ger att

$$\int_0^\infty \frac{x^{u-1}}{1+x} dx = \frac{-2\pi i e^{ui\pi}}{1 - e^{2\pi iu}} = \pi \left(\frac{2i}{e^{-ui\pi} + e^{ui\pi}} \right) = \frac{\pi}{\sin(\pi u)},$$

där $0 < u < 1$. $\square$

Sats 3.29. ***(Eulers reflektionsformel)*** *Låt $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Då gäller att*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

Bevis. Låt $x \in]0,1[$. Vi beräknar

$$\begin{aligned}
\Gamma(x)\Gamma(1-x) &= \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt \int_0^\infty e^{-u}u^{-x}du = \int_0^\infty e^{-u}u^{-x}\left(\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt\right)du \\
&= \int_0^\infty e^{-u}u^{-x}\left(\int_0^\infty e^{-su}s^{x-1}u^x ds\right)du = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-u(1+s)}du\right)s^{x-1}ds \\
&= \int_0^\infty \frac{s^{x-1}}{1+s}ds \overset{(3.26)}{=} \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.
\end{aligned}$$

Funktionen $\Gamma(z)\Gamma(1-z) - \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ är analytisk i $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ och försvinner på linjen $]0,1[\subset \mathbb{R}$, och därför överallt.

□

Med hjälp av föregående Sats ser vi exempelvis att $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Sats 3.30. *$\Gamma(z) \neq 0$ för alla $z \in \mathbb{C}$. Speciellt är $\frac{1}{\Gamma(z)}$ en hel funktion.*

Bevis. Påståendet följer omedelbart från Sats 3.29 eftersom $\Gamma(z) \neq 0$ för alla $z \in \mathbb{C} \setminus \{0,-1,-2,\dots\}$ och punkterna $0,-1,-2,\dots$ är 1. ordningens poler. □

Sats 3.31. *Det gäller att*

$$\sqrt{\pi}\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right).$$

Bevis. Det följer från Anmärkning 3.24, genom att studera andra derivatan av $\log\Gamma(z)$, att

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(z+n)^2}.$$

Det gäller att

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right) + \frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z+\frac{1}{2})}{\Gamma(z+\frac{1}{2})}\right) &= \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(z+n)^2} + \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(z+n+\frac{1}{2})^2} \\
&= 4\left[\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2z+2n)^2} + \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2z+2n+1)^2}\right] \\
&= 4\sum_{m=0}^\infty \frac{1}{(2z+m)^2} = 2\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(2z)}{\Gamma(2z)}\right).
\end{aligned}$$

Vi integrerar och erhåller att

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=e^{az+b}\Gamma(2z),$$

där a och b är konstanter. Vi vet att $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$, $\Gamma(1)=1$, $\Gamma(3/2)=\frac{1}{2}\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}/2$ och $\Gamma(2)=1$. Insättning ger att

$$\frac{a}{2}+b=\frac{\log\pi}{2} \quad \text{och} \quad a+b=\frac{\log\pi}{2}-\log 2$$

vilket ger att

$$a=-2\log 2 \quad \text{och} \quad b=\frac{\log\pi}{2}+\log 2,$$

och vi erhåller alltså att

$$\sqrt{\pi}\Gamma(2z)=2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right).$$

□

3.2 Riemanns zetafunktion

Zetafunktionen är speciellt viktig inom komplexanalys och analytisk talteori. Enligt tradition betecknar vi $s=\sigma+it$, där $\sigma,t\in\mathbb{R}$, då vi diskuterar zetafunktionen $\zeta(s)$. Man vet mycket om denna funktion, men syftet med detta kapitel är endast att presentera de mest nödvändiga egenskaper som vi behöver för att bevisa primtalssatsen. Diskussionen följer [Sak] till stor del. Vi kommer att diskutera zetafunktionen, och speciellt dess nollställen, grundligare i kap. 5. Mera information kan man finna i [Tit51], [Edw] och [Apo].

Definition 3.32. Låt $\sigma=\operatorname{Re}s>1$. Vi definierar zetafunktionen som

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}.$$

Summan konvergerar likformigt i halvplanet $\sigma>1$, och zetafunktionen är alltså analytisk i samma halvplan.

Sats 3.33. ***(Eulers produktformel)*** *Om $\sigma>1$ kan vi uttrycka $\zeta(s)$ som*

$$\zeta(s)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-p_k^{-s}},$$

där $p_1,p_2\ldots$ är primtalen.

Bevis. Vi noterar att $|1-(1-p_k^{-s})| = |p_k^{-s}| = p_k^{-\sigma} \leq k^{-\sigma}$ och att $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\sigma}$ konvergerar om $\sigma > 1$. Enligt Lemma 3.18 konvergerar produkten $\prod_{k=1}^{\infty}(1-p_k^{-s})$ till en analytisk funktion i $\{s|\sigma > 1\}$ och speciellt gäller det att $\prod_{k=1}^{\infty}(1-p_k^{-s}) \neq 0$. Samma gäller för $\prod_{k=1}^{\infty}(1-p_k^{-s})^{-1}$.

Det räcker att visa att

$$\zeta(\sigma) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-p_k^{-\sigma}}\right) \quad \text{då } \sigma > 1.$$

Låt $\sigma > 1$. Vi fixerar $l \geq 2$ och använder formeln för en geometrisk serie och erhåller

$$\prod_{k=1}^{l} \frac{1}{1-p_k^{-\sigma}} = \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_l \geq 0} (p_1^{\alpha_1}\cdots p_l^{\alpha_l})^{-\sigma} = \sum_{n\geq 1}^{(l)} n^{-\sigma},$$

där $\sum^{(l)}$ innebär summering över n vars primtalsfaktorer innehålls i mängden $\{p_1,\ldots,p_l\}$. Speciellt gäller det att

$$\sum_{n\geq 1}^{(l)} \frac{1}{n^{\sigma}} \leq \prod_{k=1}^{l}\left(\frac{1}{1-p_k^{-\sigma}}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\sigma}}.$$

Påståendet följer då vi låter $l \to \infty$. □

Föregående sats och Lemma 3.18 ger direkt följande korollarium.

Korollarium 3.34. *Låt $\sigma > 1$. Då gäller det att $\zeta(s) \neq 0$.*

Sats 3.35. *Låt $\sigma > 0$. För varje heltal $N \geq 0$ gäller att*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} - s\int_N^{\infty}\frac{x-\lfloor x\rfloor}{x^{s+1}}dx.$$

Bevis. Vi använder Sats 2.7 med $f(t) = t^{-s}$ och heltal x och y och erhåller

$$\sum_{y<n\leq x}\frac{1}{n^s} = \int_y^x \frac{dt}{t^s} - s\int_y^x \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^{s+1}}dt.$$

Vi fixerar $y = N$ och $\sigma > 1$, och låter $x \to \infty$. Då får vi att

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = \int_N^{\infty}\frac{dt}{t^s} - s\int_N^{\infty}\frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^{s+1}}dt,$$

vilket vi kan skriva om som

$$\zeta(s) - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} = \frac{N^{1-s}}{s-1} - s\int_N^\infty \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^{s+1}} dt.$$

Detta bevisar påståendet då $\sigma > 1$. Om $\sigma \geq \delta > 0$ domineras integralen av $\int_N^\infty t^{-\delta-1}$ och konvergerar likformigt då $\sigma \geq \delta$ och representerar därav en analytisk funktion i $\{s|\sigma > 0\}$. Påståendet gäller alltså för $\sigma > 0$ p.g.a. analytisk fortsättning.

□

Vi använder satsen ovan för att erhålla ett uttryck för derivatan. Vi deriverar termvis och får följande korollarium:

Korollarium 3.36. *Låt $\sigma > 0$. För varje heltal $N \geq 0$ gäller att*

$$\begin{aligned}\zeta'(s) = &-\sum_{n=1}^{N} \frac{\log n}{n^s} + s\int_N^\infty \frac{(x - \lfloor x \rfloor)\log x}{x^{s+1}} dx - \int_N^\infty \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x^{s+1}} dx \\ &- \frac{N^{1-s}\log N}{s-1} - \frac{N^{1-s}}{(s-1)^2}.\end{aligned}$$

Anmärkning 3.37. Vi kan derivera under integraltecknet i (3.35) eftersom

$$\int_N^\infty \left|\frac{(x - \lfloor x \rfloor)\log x}{x^{s+1}}\right| dx < \int_N^\infty \left|\frac{\log x}{x^{s+1}}\right| dx < \infty.$$

Detta hittas t.ex. i [Jones] s.154.

Sats 3.38. *Om $\sigma > 1$ gäller det att*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}.$$

Bevis. Vi beräknar direkt att

$$\begin{aligned}-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= (-\log\zeta(s))' = \left(-\log\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right)^{-1}\right)' = \left(-\sum_{k=1}^{\infty}\log\left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right)^{-1}\right)' \\ &= \left(\sum_{k=1}^{\infty}\log\left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\log\left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right)\right)'.\end{aligned}$$

Vi deriverar och erhåller att

$$\frac{d}{ds}\left(\log\left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right)\right) = \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right)(-\log p_k)p_k^{-s} = \log p_k \frac{1}{1 - p_k^s}.$$

Vi får alltså att

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{k=1}^{\infty} \log p_k (p_k^{-s} + p_k^{-2s} + \cdots) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

$\square$

Vi intoducerar integrationsstigen C_a i bild 2. Låt $a \in \,]0,1[$. Integrationsstigen (eng. *Hankel contour*) C_a består av linjen som sträcker sig från $ia + \infty$ till ia, halvcirkeln $\{ae^{it} | \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2}\}$ och linjen från $-ia$ till $-ia + \infty$.

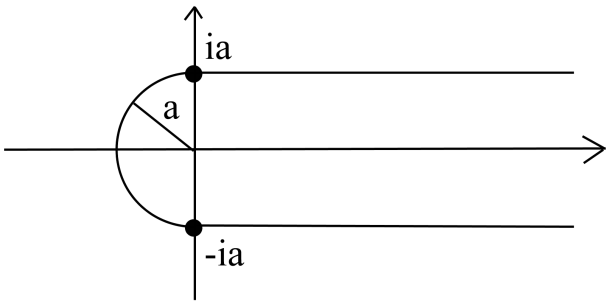

Bild 2. Integrationsstigen C_a.

Lemma 3.39. *(i) Om $\sigma > 1$ gäller det att*

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt.$$

(ii) Integralen

$$H(s) := \int_{C_a} \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} dz$$

konvergerar och definierar en hel funktion. Desutom beror integralens värde inte på $a \in \,]0,1[$.

(iii) Om $\sigma > 1$ gäller det att

$$\int_{C_a} \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} dz = (e^{2\pi i s} - 1)\Gamma(s)\zeta(s).$$

Bevis. (i) Låt $\sigma > 1$. Vi substituerar $x = nt$ i formeln $\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$ och erhåller att

$$n^{-s}\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-nt} t^{s-1} dt.$$

Vi summerar från 1 till l och tillämpar formeln för en geometrisk summa, och får att

$$\sum_{1}^{l} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \left(\int_0^\infty \frac{1}{e^t - 1} t^{s-1} dt - \int_0^\infty \frac{e^{-lt}}{e^t - 1} t^{s-1} dt \right).$$

Vi använder dominerade konvergenssatsen och erhåller att

$$\lim_{l \to \infty} \int_0^\infty \frac{e^{-lt}}{e^t - 1} t^{s-1} dt = \int_0^\infty \lim_{l \to \infty} \frac{e^{-lt}}{e^t - 1} t^{s-1} dt = 0.$$

Vi noterar också att om $\sigma > 1$ så gäller det att

$$\int_0^1 \left| \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} \right| dt = \int_0^1 \frac{t^{\sigma-1}}{e^t - 1} dt \leq \int_0^1 c t^{\sigma-2} dt < \infty.$$

Påståendet följer då vi låter $l \to \infty$.

(ii) Vi har att $z^{s-1} = \exp((s-1)\log z)$, där $0 < \arg z < 2\pi$. Integralen över C_a konvergerar eftersom det för stora värden för $\operatorname{Re} z$ gäller att

$$\left| \frac{1}{e^z - 1} \right| \leq \frac{1}{|e^z| - 1} \leq \frac{1}{e^{\operatorname{Re} z} - 1},$$

och om $|t| \leq b$ och $\sigma > 1$ gäller det för alla $z \in C_a$ att

$$|z^{s-1}| = \exp((\sigma - 1)\log|z| - t\arg z) \leq e^{2\pi b}|z|^{\sigma-1} \leq c(b)(1 + |\operatorname{Re} z|)^{\sigma-1}.$$

Enligt definition är

$$\int_{C_a} \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} dz = \lim_{M \to \infty} \int_{C_{a,M}} \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} dz,$$

där $C_{a,M} = C_a \cap \{z | \operatorname{Re} z \leq M\}$.

Om $0 < a < a'$ gäller det enligt Sats 3.10 att

$$\int_{C_{a,M}} \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} dz - \int_{C_{a',M}} \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} dz = \int_{L_M^1 + L_M^2} \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} dz,$$

där stigarna $C_{a',M}$,$C_{a,M}$,L_M^1 och L_M^2 fås ur bild 3.

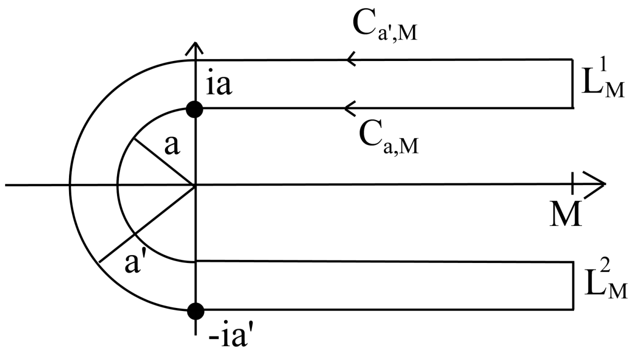

Bild 3. Integrationsstigarna $C_{a',M}$,$C_{a,M}$,L_M^1 och L_M^2.

På L_M^i, $i = 1, 2$, uppskattar vi

$$\left| \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} \right| \leq c(t) \frac{(M+1)^{\sigma - 1}}{e^M - 1} \to 0 \text{ då } M \to \infty.$$

Eftersom längden av L_M är mindre än 1 får vi alltså att

$$\lim_{M \to \infty} \int_{L_M^1 + L_M^2} \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} dz = 0.$$

Om vi nu låter $M \to \infty$ erhåller vi att

$$\int_{C_a} \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} dz = \int_{C_{a'}} \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} dz.$$

Om vi fixerar a och låter $s \in B(z_0, 1)$, där $s_0 \in \mathbb{C}$ är godtycklig har vi ett polynom som är begränsat av $\operatorname{Re} z$. Dessutom är $|e^z - 1| \geq ce^{\operatorname{Re} z}$ på C_a. Vi har alltså att

$$\left| \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} \right| \leq \frac{c(1 + \operatorname{Re} z)^b}{e^{\operatorname{Re} z}} \quad \text{om} \begin{cases} s \in B(z_0, 1) \\ z \in C_a. \end{cases}$$

Nu kan vi tillämpa Lemma 3.17, och vi erhåller att avbildningen

$$s \mapsto \int_{C_a} \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} dz$$

är hel.

(iii) Anta att $\sigma \geq 2$. Vi använder Taylorutvecklingen för e^z vid $z = 0$, och erhåller att

$$\left|\frac{z^{s-1}}{e^z - 1}\right| \leq \frac{|z^{s-1}|e^{2\pi\epsilon}}{c|z|} \leq c'|z|^{s-2} \leq c'(1 + |\operatorname{Re} z|)^{s-2}$$

nära origo. För integralen över halvcirkeln gäller det att

$$\left|\int \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} dz\right| \leq \pi a \cdot a^{s-2} c' = c'' a^{s-1} \to 0 \text{ då } a \to 0.$$

Vi ser att

$$\int_{ia+\infty}^{ia} \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} dz \to - \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt \quad \text{då } a \to 0^+,$$

och då vi noterar att om $t > 0$ gäller det att

$$\begin{aligned}(t - ia)^{s-1} &= \exp((s-1)\log(t - ia)) = \exp\Big((s-1)(\log(a^2 + t^2)^{\frac{1}{2}} + \arg(t - ia))\Big) \\ &\overset{a \to 0^+}{\to} \exp\left((s-1)(\log t + 2\pi i)\right) = t^{s-1} e^{2\pi i s},\end{aligned}$$

och vi får att

$$\int_{-ia}^{-ia+\infty} \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} dz \overset{a \to 0^+}{\to} e^{2\pi i s} \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt.$$

Då vi kombinerar våra observationer erhåller vi att

$$\begin{aligned}\int_{C_a} \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} dz = \lim_{a \to 0} \int_{C_a} \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} dz &= (e^{2\pi i s}) \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt \\ &= (e^{2\pi i s})\Gamma(s)\zeta(s).\end{aligned}$$

Analytisk fortsättning ger påståendet.

□

Sats 3.40. *$\zeta(s)$ är meromorfisk i hela $\mathbb{C}$ och dess enda singularitet, som är en 1. ordningens pol, är $s = 1$.*

Bevis. Enligt Lemma 3.39 gäller det att

$$\zeta(s) = \frac{H(s)}{(e^{2\pi i s} - 1)\Gamma(s)},$$

om $\sigma > 0$, där $H(s)$ är hel. Nämnaren $(e^{2\pi i s} - 1)\Gamma(s)$ är tydligt meromorfisk, men i själva verket är den analytisk. Funktionen $(e^{2\pi i s} - 1)$ har nollställena $\mathbb{Z}$, som tar ut gammafunktionens poler $0, -1, -2 \ldots$. $\zeta(s)$ är alltså en kvot av meromorfiska funktioner och är meromorfisk i $\mathbb{C}$ och kan ha poler där $(e^{2\pi i s}-1)\Gamma(s)=0$, d.v.s. i $s=1,2,3\dots$. Vi vet redan att $\zeta(s)$ är analytisk i halvplanet $\sigma>1$. Alltså är $s=1$ den enda möjliga polen, eftersom vi vet att $\Gamma(1)=1\neq 0$, och att $(e^{2\pi i s}-1)$ har ett enkelt nollställe i $s=1$. Punkten $s=1$ är alltså en pol, eftersom

$$H(1)=\int_{C_{\frac{1}{2}}}\frac{dz}{e^z-1}\neq 0.$$

□

Följande resultat är speciellt viktigt. Satsen bevisades först av Bernhard Riemann i sin revolutionära artikel *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* (eng. *On the Number of Primes Less Than a Given Magnitude*) 1859. Vi presenterar ett av de ursprungliga bevisen.

Sats 3.41. ***(Riemanns funktionalekvation)*** *För alla $s\in\mathbb{C}$ gäller att*

$$\zeta(s)=\left[2^s\pi^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\right]\zeta(1-s).$$

Bevis. Vi börjar med att notera att båda sidorna representerar en meromorfisk funktion, och därför gäller likheten för alla $s\in\mathbb{C}$.

Om $\sigma>0$ observerar vi att substitutionen $y=n^2\pi x$ ger

$$\int_0^\infty x^{\frac{1}{2}s-1}e^{-n^2\pi x}dx=\frac{\Gamma(\frac{1}{2}s)}{n^s\pi^{\frac{1}{2}s}}.$$

Om nu $\sigma>1$ gäller det att

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}s)\zeta(s)}{\pi^{\frac{1}{2}s}}&=\frac{\Gamma(\frac{1}{2}s)}{\pi^{\frac{1}{2}s}}\left(\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^s}\right)=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^s}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}s)}{\pi^{\frac{1}{2}s}}=\sum_{n=1}^\infty\int_0^\infty x^{\frac{1}{2}s-1}e^{-n^2\pi x}dx\\&=\int_0^\infty x^{\frac{1}{2}s-1}\sum_{n=1}^\infty e^{-n^2\pi x}dx.\end{aligned}$$

Vi kan byta ordning p.g.a. absolut konvergens. Vi betecknar

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^\infty e^{-n^2\pi x}$$

och får att

$$\zeta(s)=\frac{\pi^{\frac{1}{2}s}}{\Gamma(\frac{1}{2}s)}\int_0^\infty x^{\frac{1}{2}s-1}\psi(x)dx. \tag{3.42}$$

Om $x > 0$ antar vi känna till att

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi/x}, \tag{3.43}$$

och

$$2\psi(x) + 1 = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(2\psi\left(\frac{1}{x}\right) + 1 \right). \tag{3.44}$$

Vi bevisar inte dessa, eftersom bevisen är mycket tekniska (se t.ex. [Tit51] s.22).

Nu erhåller vi alltså att

$$\begin{aligned}
\pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma(\frac{1}{2}s)\zeta(s) &= \int_0^1 x^{\frac{1}{2}s-1}\psi(x)dx + \int_1^\infty x^{\frac{1}{2}s-1}\psi(x)dx \\
&= \int_0^1 x^{\frac{1}{2}s-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\psi\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\right)dx + \int_1^\infty x^{\frac{1}{2}s-1}\psi(x)dx \\
&= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_0^1 x^{\frac{1}{2}s-\frac{3}{2}}\psi\left(\frac{1}{x}\right)dx + \int_1^\infty x^{\frac{1}{2}s-1}\psi(x)dx.
\end{aligned}$$

Vi gör substitutionen $x \mapsto \frac{1}{x}$ i integralen $\int_0^1$ och får alltså att $dx \mapsto \frac{-1}{x^2}$, $1 \mapsto 1$ och $0 \mapsto \infty$. Vi erhåller att

$$\int_0^1 x^{\frac{1}{2}s-\frac{3}{2}}\psi\left(\frac{1}{x}\right)dx = \int_\infty^1 \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}s-\frac{3}{2}} \psi(x)\left(\frac{-1}{x^2}\right)dx = \int_1^\infty x^{-\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}}\psi(x)dx.$$

Vi får alltså att

$$\pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma(\frac{1}{2}s)\zeta(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty (x^{-\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}s-1})\psi(x)dx,$$

och p.g.a. analytisk fortsättning gäller formeln för alla s. Den högra sidan förblir oförändrad om vi substituerar s med $s-1$, och vi erhåller att

$$\pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\zeta(s) = \pi^{\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}s\right)\zeta(1-s). \tag{3.45}$$

Förenkling ger att

$$\begin{aligned}
\zeta(s) &= \pi^{s-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)}\zeta(1-s) \overset{(3.29)}{=} \pi^{s-\frac{3}{2}}\Gamma\left(1-\frac{1}{2}s\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s\right)\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(1-s) \\
&\overset{(3.31)}{=} \pi^{s-\frac{3}{2}}2^s\Gamma(1-s)\sqrt{\pi}\zeta(1-s) = \left[2^s\pi^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\right]\zeta(1-s).
\end{aligned}$$

□

3.2.1 Dirichletserier och Dirichletprodukter

Definition 3.46. Låt $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ vara en talteoretisk funktion. Då är serien

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

en *Dirichletserie.*

Zetafunktionen $\zeta(s)$ är alltså en Dirichletserie. I detta kapitel diskuterar vi Dirichletserier för att bevisa satserna 3.60 och 3.62. Diskussionen följer [Apo], som också innehåller vidare information. Dirichletserierna är uppkallade efter den tyska matematikern Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet som är känd för bl.a. talteori.

Låt $s = \sigma + it$. Om $\sigma \geq a$ märker vi att $|n^s| = n^\sigma \geq n^a$ varav

$$\left| \frac{f(n)}{n^s} \right| \leq \frac{|f(n)|}{n^a}.$$

Om en Dirichletserie konvergerar absolut då $s = a + ib$, så konvergerar den också absolut för alla s där $\sigma \geq a$. Vi erhåller följande sats:

Sats 3.47. *Anta att serien $\sum |f(n)n^{-s}|$ varken konvergerar för alla $s \in \mathbb{C}$ eller divergerar för alla $s \in \mathbb{C}$. Då existerar det ett reellt tal σ_a, abskissan för absolut konvergens, så att serien $\sum |f(n)n^{-s}|$ konvergerar absolut om $\sigma > \sigma_a$, men konvergerar inte absolut om $\sigma < \sigma_a$.*

Bevis. Låt $D := \{\sigma \in \mathbb{R} : \sum |f(n)n^{-s}| \text{ divergerar}\}$. D är icke-tom eftersom serien inte konvergerar för alla s och dessutom är D uppifrån begränsad eftersom serien inte divergerar för alla s. D har alltså en minsta övre gräns σ_a. Om $\sigma < \sigma_a$ så gäller det att $\sigma \in D$, annars skulle σ vara en övre gräns som är mindre än σ_a. Om $\sigma > \sigma_a$ så gäller det att $\sigma \notin D$ eftersom σ_a är en övre gräns för D.

□

Lemma 3.48. *Om $N \geq 1$ och $\sigma \geq c > \sigma_a$ så gäller det att*

$$\left| \sum_{n=N}^{\infty} f(n)n^{-s} \right| \leq N^{-(\sigma-c)} \sum_{n=N}^{\infty} |f(n)|n^{-c}.$$

Bevis. Det gäller att

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=N}^{\infty} f(n)n^{-s} \right| &\leq \sum_{n=N}^{\infty} |f(n)|n^{-\sigma} = \sum_{n=N}^{\infty} |f(n)|n^{-c}n^{-(\sigma-c)} \\ &\leq N^{-(\sigma-c)} \sum_{n=N}^{\infty} |f(n)|n^{-c}. \end{aligned}$$

□

Sats 3.49. *Anta att* $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ *konvergerar absolut om* $\sigma > \sigma_a$. *Då gäller det för alla* $|t| < \infty$ *att*

$$\lim_{\sigma\to\infty} F(\sigma + it) = f(1).$$

Bevis. Eftersom $F(s) = f(1) + \sum_{n=2}^{\infty} f(n)n^{-s}$ räcker det att visa att den senare termen går mot noll då $\sigma \to \infty$. Låt $c > \sigma_a$. Om $\sigma \geq c$ så ger Lemma 3.48 att

$$\left|\sum_{n=2}^{\infty} f(n)n^{-s}\right| \leq 2^{-(\sigma-c)} \sum_{n=2}^{\infty} |f(n)|n^{-c} = \frac{A}{2^{\sigma}},$$

där A är oberoende av σ och av t. Eftersom $A/2^{\sigma} \to 0$ då $\sigma \to \infty$ bevisar detta satsen. □

Sats 3.50. ***(Entydighetssatsen)*** *Låt*

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \quad \textit{och} \quad G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}$$

vara Dirichletserier som konvergerar absolut om $\sigma > \sigma_a$. *Om* $F(s) = G(s)$ *för varje* s *i en oändlig följd* $\{s_k\}$ *sådan att* $\sigma_k \to \infty$ *då* $k \to \infty$, *så är* $f(n) = g(n)$ *för alla* n.

Bevis. Låt $h(n) = f(n) - g(n)$ och låt $H(s) = F(s) - G(s)$. Nu är $H(s_k) = 0$ för alla k. För att bevisa att $h(n) = 0$ för alla n antar vi att $h(n) \neq 0$ för något n och erhåller en motsägelse.

Låt N vara det minsta heltalet för vilket $h(n) \neq 0$. Då är

$$H(s) = \sum_{n=N}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s} = \frac{h(N)}{N^s} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s},$$

varav

$$h(N) = N^s H(s) - N^s \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}.$$

Om $s = s_k$ har vi att $H(s_k) = 0$ varav

$$h(N) = -N^{s_k} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^{s_k}}.$$

Vi väljer k så att $\sigma_k > c$ där $c > \sigma_a$. Då får vi enligt Lemma 3.48 att

$$|h(N)| \leq N^{\sigma_k}(N+1)^{-(\sigma_k - c)} \sum_{n=N+1}^{\infty} |h(n)|n^{-c} = A\left(\frac{N}{N+1}\right)^{\sigma_k},$$

där A är oberoende av k. Då vi låter $k \to \infty$ får vi att $(N/(N+1))^{\sigma_k} \to 0$ och $h(N) = 0$. Denna motsägelse visa påståendet.

□

Definition 3.51. Om f och g är talteoretiska funktioner definierar vi deras *Dirichletprodukt* (eller *Dirichletkonvolution*) h som

$$h(n) = (f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right).$$

Sats 3.52. *Låt $F(s)$ och $G(s)$ vara funktioner som representeras av Dirichletserier;*

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \quad \text{då } \sigma > a$$

och

$$G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s} \quad \text{då } \sigma > b.$$

I halvplanet där båda serierna konvergerar absolut gäller det att

$$F(s)G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s},$$

där $h(n) = (f * g)(n)$. Dessutom, om $F(s)G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(n)n^{-s}$ för alla s i en följd $\{s_k\}$ där $\sigma_k \to \infty$ då $k \to \infty$, så är $\alpha(n) = (f * g)(n)$.

Bevis. För varje s där bägge serier konvergerar absolut gäller det att

$$F(s)G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s} \sum_{m=1}^{\infty} g(m)m^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} f(n)g(m)(mn)^{-s}.$$

Eftersom serierna konvergerar absolut kan vi multiplicera ihop dem och ändra på summeringsordningen utan att ändra på summan. Vi samlar ihop termerna för vilka $mn = k$, $k = 1, 2, \ldots$ och får att

$$F(s)G(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{mn=k} f(n)g(m) \right) k^{-s} = \sum_{k=1}^{\infty} h(k)k^{-s},$$

där $h(k) = \sum_{mn=k} f(n)g(m) = (f * g)(k)$. Detta bevisar det första påståendet, och det andra påståendet följer direkt från Sats 3.50.

□

Definition 3.53. Om $n > 1$ kan vi skriva $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$. Vi definierar Möbiusfunktionen μ enligt $\mu(1) = 1$ och

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^k & \text{om } a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 1, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Sats 3.54. *Om* $n \geq 1$ *gäller det att*

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \lfloor \frac{1}{n} \rfloor = \begin{cases} 1 & om\ n = 1, \\ 0 & om\ n > 1. \end{cases}$$

Bevis. Påståendet gäller trivialt då $n = 1$. Anta att $n > 1$. Nu kan vi skriva $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$. De termer i summan $\sum_{d|n} \mu(d)$ som inte försvinner består av $d = 1$ och av de tal som delar n och är produkter av skilda primtal. Vi erhåller alltså att

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \mu(d) &= \mu(1) + \mu(p_1) + \cdots + \mu(p_k) + \mu(p_1 p_2) + \cdots + \mu(p_{k-1} p_k) \\ &\quad + \cdots + \mu(p_1 p_2 \cdots p_k) \\ &= 1 + \binom{k}{1}(-1) + \binom{k}{2}(-1)^2 + \cdots + \binom{k}{k}(-1)^k = (1-1)^k = 0. \end{aligned}$$

□

Definition 3.55. Den talteoretiska funktionen

$$I(n) = \lfloor \frac{1}{n} \rfloor = \begin{cases} 1 & \text{om } n = 1, \\ 0 & \text{om } n > 1, \end{cases}$$

kallas *identitetsfunktionen.*

Sats 3.56. *För alla talteoretiska funktioner* f, g *och* k *gäller att:*

$$f * g = g * f \quad \textit{(kommutativitet)}$$

$$(f * g) * k = f * (g * k) \quad \textit{(associtivitet).}$$

Bevis. Vi noterar att definitionen för $f * g$ kan utryckas som:

$$(f * g)(n) = \sum_{a \cdot b = n} f(a) g(b),$$

där a och b varierar mellan alla positiva heltal vars produkt är n, och kommutativiteten är klar.

Låt $A = g * k$ och betrakta $f * A = f * (g * k)$. Vi får att

$$\begin{aligned} (f * A)(n) &= \sum_{a \cdot d = n} f(a) A(d) = \sum_{a \cdot d = n} f(a) \sum_{b \cdot c = d} g(b) k(c) \\ &= \sum_{a \cdot b \cdot c = n} f(a) g(b) k(c). \end{aligned}$$

Om vi nu låter $B = f * g$ och betraktar $B * k$ får vi samma formel för $(B * k)(n)$. Vi erhåller alltså att $f * A = B * k$ varav Dirichletmultiplikationen är associativ.

□

Sats 3.57. *För alla talteoretiska funktioner f gäller att $I * f = f * I = f$.*

Bevis. Enligt Sats 3.56 vet vi att $f * I = I * f$. Direkt beräkning ger att

$$(f * I)(n) = \sum_{d|n} f(d) I\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} f(d) \lfloor \frac{d}{n} \rfloor = f(n),$$

eftersom $\lfloor \frac{d}{n} \rfloor = 0$ om $d < n$.

$\square$

Sats 3.58. *Om f är en talteoretisk funktion och $f(1) \neq 0$, så existerar det en entydig funktion $f^{-1} : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, den s.k.* Dirichletinversen *till f, så att*

$$f * f^{-1} = f^{-1} * f = I.$$

Dessutom fås f^{-1} ur rekursionsformeln

$$f^{-1}(1) = \frac{1}{f(1)}, \quad f^{-1}(n) = \frac{-1}{f(1)} \sum_{\substack{d|n \\ d<n}} f\left(\frac{n}{d}\right) f^{-1}(d) \text{ om } n > 1.$$

Bevis. Låt f vara given. Vi bör visa att ekvationen $(f * f^{-1})(n) = I(n)$ har en entydig lösning för alla funktionsvärden $f^{-1}(n)$. Om $n = 1$ skall vi lösa ekvationen

$$(f * f^{-1})(1) = I(1)$$

som reduceras till

$$f(1) f^{-1}(1) = 1.$$

Eftersom $f(1) \neq 0$ existerar det enbart en lösning, nämligen $f^{-1}(1) = 1/f(1)$. Anta nu att funktionsvärden $f^{-1}(k)$ är entydigt bestämda för alla $k < n$. Vi skall nu lösa ekvationen $(f * f^{-1})(n) = I(n)$, d.v.s.

$$\sum_{d|n} f\left(\frac{n}{d}\right) f^{-1}(d) = 0.$$

Detta kan vi skriva om som

$$f(1) f^{-1}(n) + \sum_{\substack{d|n \\ d<n}} f\left(\frac{n}{d}\right) f^{-1}(d) = 0.$$

Om funktionsvärden $f^{-1}(d)$ är kända för alla delare d till n så existerar det en entydig lösning $f^{-1}(n)$, nämligen

$$f^{-1}(n) = \frac{-1}{f(1)} \sum_{\substack{d|n \\ d<n}} f\left(\frac{n}{d}\right) f^{-1}(d),$$

eftersom $f(1) \neq 0$. Induktion ger både existensen och entydigheten av f^{-1}.

$\square$

Definition 3.59. Vi definierar den talteoretiska enhetsfunktionen u som $u(n) = 1$ för alla n.

Enligt Sats 3.54 är $\sum_{d|n} \mu(d) = I(n)$. Vi erhåller alltså att

$$\mu * u = I.$$

Vi får enligt Sats 3.57 att $u = \mu^{-1}$ och $\mu = u^{-1}$.

Sats 3.60.

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}.$$

Bevis. Serierna $\sum n^{-s}$ och $\sum \mu(n)n^{-s}$ konvergerar absolut om $\sigma > 1$. Vi väljer $f(n) = 1$ och $g(n) = \mu(n)$ i Sats 3.52 och erhåller att $h(n) = (f * g)(n) = \lfloor 1/n \rfloor$, varav

$$\zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = 1 \quad \text{om } \sigma > 1.$$

$\square$

Sats 3.61. *Låt $F(s) = \sum f(n)n^{-s}$ konvergera absolut om $\sigma > \sigma_a$ och anta att $f(1) \neq 0$. Om $F(s) \neq 0$ då $\sigma > \sigma_0 \geq \sigma_a$, så gäller att*

$$F(s) = e^{G(s)},$$

då $\sigma > \sigma_0$, där

$$G(s) = \log f(1) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(f' * f^{-1})(n)}{\log n} n^{-s},$$

och f^{-1} är Dirichletinversen av f samt $f'(n) = f(n) \log n$.

Bevis. Eftersom $F(s) \neq 0$ kan vi skriva $F(s) = e^{G(s)}$ där $G(s)$ är analytisk om $\sigma > \sigma_0$. Vi deriverar och erhåller att

$$F'(s) = e^{G(s)}G'(s) = F(s)G'(s),$$

varav $G'(s) = F'(s)/F(s)$. Å andra sidan, med termvis derivering är

$$F'(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n) \log n}{n^s} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'(n)}{n^s},$$

och enligt Satserna 3.52 och 3.58 är

$$\frac{1}{F(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{-1}(n)}{n^s}.$$

Då erhåller vi från Sats 3.52 att

$$G'(s) = F'(s) \cdot \frac{1}{F(s)} = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(f' * f^{-1})(n)}{n^s}.$$

Då vi integrerar termvis med avseende på s då $\sigma > \sigma_a$ får vi att

$$G(s) = C + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(f' * f^{-1})(n)}{\log n} n^{-s},$$

där C är en konstant. Då vi låter $\sigma \to \infty$ erhåller vi att $\lim_{\sigma\to\infty} G(\sigma + it) = C$, varav det enligt Sats 3.49 gäller att

$$f(1) = \lim_{\sigma\to\infty} F(\sigma + it) = e^C$$

och $C = \log f(1)$.

□

Sats 3.62. *Om $\sigma > 1$ gäller att*

$$\zeta(s) = e^{G(s)} \quad \textit{där} \quad G(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\log n} n^{-s}.$$

Bevis. Om $f(n) = 1$ så gäller det att $f'(n) = \log n$ och $f^{-1}(n) = \mu(n)$, varav

$$(f' * f^{-1})(n) = \sum_{d|n} (\log d)\, \mu\left(\frac{n}{d}\right) = \begin{cases} \log p & \text{om } n = p^m \text{ för något primtal } p, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases} = \Lambda(n).$$

Om $\sigma > 1$ gäller det enligt Sats 3.61 att

$$\zeta(s) = e^{G(s)},$$

där

$$G(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\log n} n^{-s}.$$

□

Kapitel 4

Primtalssatsen

4.1 Bevisidén

Vi framför först en skiss av beviset, detaljerna kommer senare i kap. 4. Beviset som presenteras följer [Apo]. I Sats 2.10 visade vi att primtalssatsen är ekvivalent med påståendet

$$\psi(x) \sim x \quad \text{då} \quad x \to \infty, \tag{4.1}$$

där ψ är Chebyshevs funktion

$$\psi(x) = \sum_{n \le x} \Lambda(n).$$

Vi kommer att visa påståendet genom att använda Riemanns ζ-funktion och dess egenskaper. Fördelen med det analytiska beviset är att det är kortare, och tekniskt lättare, än ett så kallat elementärt bevis.

ψ-funktionen är en trappfunktion och därför är det lättare att handskas med dess integralfunktion ψ_1. Vi kommer alltså att betrakta funktionen

$$\psi_1(x) = \int_1^x \psi(t)dt, \quad x > 1.$$

Vi kommer att visa att

$$\psi_1(x) \sim \frac{1}{2}x^2 \quad \text{då} \quad x \to \infty \tag{4.2}$$

implicerar (4.1) och sedan bevisar vi (4.2).

Efter detta uttrycker vi $\psi_1(x)/x^2$ med hjälp av $\zeta(s)$, som en oegentlig linjeintegral

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^{s-1}}{s(s+1)} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) ds, \quad \text{där} \quad c > 1.$$

Kvoten $-\zeta'(s)/\zeta(s)$ har en pol vid $s = 1$ där residyn blir 1. Vi eliminerar polen och får

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^{s-1}}{s(s+1)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1}\right)ds, \quad \text{där} \quad c > 1. \tag{4.3}$$

Låt

$$h(s) = \frac{1}{s(s+1)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1}\right).$$

Vi skriver om (4.3) som

$$\begin{aligned}\frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 &= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{s-1}h(s)ds \\ &= \frac{x^{c-1}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} h(c+it)e^{it\log x}dt.\end{aligned}$$

Nu bör vi alltså visa att

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{c-1}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} h(c+it)e^{it\log x}dt = 0. \tag{4.4}$$

Till sist kommer vi att tillämpa Riemann-Lebesgues lemma som säger att

$$\lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{itx}dt = 0$$

om integralen $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt$ konvergerar. Vi visar att integralen i (4.4) konvergerar om $c > 1$. Problemet är att termen x^{c-1} utanför integralen divergerar om $c > 1$, medan vi vill betrakta situationen $c = 1$. Det svåra blir att bevisa att $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(1+it)|dt$ konvergerar.

4.2 Några hjälpsatser och början av beviset

Lemma 4.5. *Låt $a(n)$ vara en talteoretisk funktion och låt*

$$A(x) = \sum_{n\le x} a(n),$$

där $A(x) = 0$ om $x < 1$. Då gäller att

$$\sum_{n\le x}(x-n)a(n) = \int_1^x A(t)dt.$$

Bevis. Enligt Abels lemma (Sats 2.6) är

$$\sum_{y<n\leq x} a(n)f(n) = A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_y^x A(t)f'(t)dt$$

om f har en kontinuerlig derivata i intervallet $[y,x]$, där $0 < y < x$. Välj $f(t) = t$ och $y = \frac{1}{2}$. Vi får att

$$\sum_{n\leq x} a(n)f(n) = A(x)f(x) - \int_1^x A(t)dt,$$

där $A(x)f(x) = x\sum_{n\leq x} a(n)$ och $\sum_{n\leq x} a(n)f(n) = \sum_{n\leq x} na(n)$, vilket ger att

$$\sum_{n\leq x}(x-n)a(n) = \int_1^x A(t)dt.$$

□

Lemma 4.6. *Låt* $A(x) = \sum_{n\leq x} a(n)$ *och låt* $A_1(x) = \int_1^x A(t)dt$. *Antag att* $a(n) \geq 0$ *för alla* n. *Om*

$$A_1(x) \sim Lx^c \quad \textit{då} \quad x \to \infty$$

för något $c > 0$ *och* $L > 0$, *så gäller att*

$$A(x) \sim cLx^{c-1} \quad \textit{då} \quad x \to \infty.$$

Bevis. Funktionen $A(x)$ är växande för att $a(n)$ är icke-negativa. Låt $\beta > 1$ och betrakta differensen $A_1(\beta x) - A_1(x)$. Vi får att

$$A_1(\beta x) - A_1(x) = \int_x^{\beta x} A(u)du \geq \int_x^{\beta x} A(x)du = A(x)(\beta x - x) = x(\beta - 1)A(x).$$

Detta ger att

$$xA(x) \leq \frac{1}{\beta - 1}(A_1(\beta x) - A_1(x))$$

och

$$\frac{A(x)}{x^{c-1}} \leq \frac{1}{\beta - 1}\left(\frac{A_1(\beta x)}{(\beta x)^c}\beta^c - \frac{A_1(x)}{x^c}\right).$$

Fixera β och låt $x \to \infty$. Vi får att

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{A(x)}{x^{c-1}} \leq \frac{1}{\beta - 1}(L\beta^c - L) = L\frac{\beta^c - 1}{\beta - 1}.$$

Låt nu $\beta \to 1^+$. Vi upptäcker att kvoten $(\beta^c - 1)/(\beta - 1)$ är differenskvoten för derivatan av x^c i punkten $x = 1$, det vill säga

$$\lim_{\beta \to 1^+} \frac{\beta^c - 1}{\beta - 1} = c.$$

Vi får alltså att

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{A(x)}{x^{c-1}} \leq cL.$$

Fixera $\alpha \in]0, 1[$. För att erhålla en uppskattning nedåt betraktar vi differensen

$$A_1(x) - A_1(\alpha x) = \int_{\alpha x}^{x} A(u) du \leq x A(x)(1 - \alpha),$$

varav vi får olikheterna

$$x A(x) \geq \frac{1}{1 - \alpha}(A_1(x) - A_1(\alpha x))$$

och

$$\frac{A(x)}{x^{c-1}} \geq \frac{1}{1 - \alpha} \left(\frac{A_1(x)}{x^c} - \frac{A_1(\alpha x)}{(\alpha x)^c} \alpha^c \right).$$

Nu får vi att

$$\liminf_{x \to \infty} \frac{A(x)}{x^{c-1}} \geq L \left(\frac{1 - \alpha^c}{1 - \alpha} \right).$$

Låt nu $\alpha \to 1^-$. Med samma argument som tidigare får vi att

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{A(x)}{x^{c-1}} \leq cL \leq \liminf_{x \to \infty} \frac{A(x)}{x^{c-1}},$$

varav $A(x) \sim cL x^{c-1}$ då $x \to \infty$.

$\square$

Vi låter nu $a(n) = \Lambda(n) \geq 0$, varav $A(x) = \psi(x)$ och $A_1(x) = \psi_1(x)$. Som en direkt följd av Lemma 4.5 och Lemma 4.6 får vi:

Sats 4.7. *Vi har att*

$$\psi_1(x) = \sum_{n \leq x} (x - n) \Lambda(n).$$

Dessutom implicerar $\psi_1(x) \sim x^2/2$ då $x \to \infty$ att $\psi(x) \sim x$ då $x \to \infty$.

Som nästa steg vill vi uttrycka $\psi_1(x)/x^2$ som en linjeintegral.

Lemma 4.8. *Låt $c > 0$ och $u > 0$. För varje heltal $k \geq 1$ gäller att*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{u^{-z}}{z(z+1)\cdots(z+k)}dz = \begin{cases}\frac{1}{k!}(1-u)^k & \text{om } 0 < u \leq 1,\\ 0 & \text{om } u > 1.\end{cases}$$

Dessutom konvergerar integralen absolut.

Anmärkning 4.9. Beteckningen $\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(z)dz = \lim_{T\to\infty}\int_{c-iT}^{c+iT} f(z)dz$ innebär integrering över den lodräta linjen $\{c + it | t \in \mathbb{R}\}$ i Bild 4.

Bevis. Vi börjar med att notera att Sats 3.22 (ii) ger med induktion att

$$f(z) := \frac{u^{-z}}{z(z+1)\cdots(z+k)} = \frac{u^{-z}\Gamma(z)}{\Gamma(z+k+1)}.$$

Vi tillämpar Residysatsen 3.16 på integralen

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C(R)}\frac{u^{-z}\Gamma(z)}{\Gamma(z+k+1)}dz,$$

där $C(R)$ är stigen på bilden.

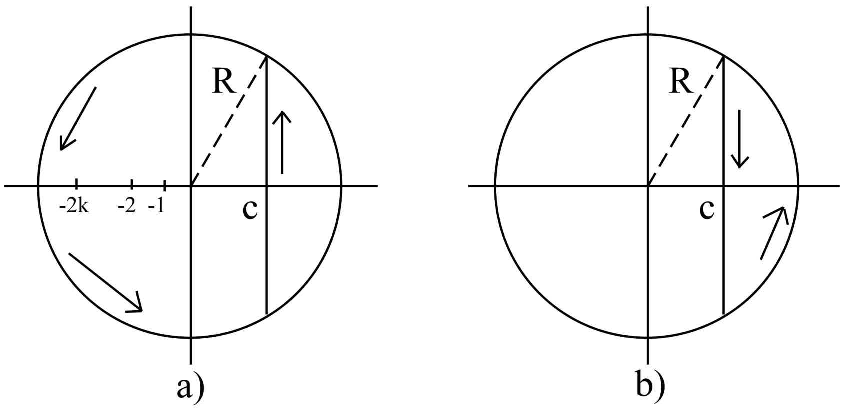

Bild 4. Integrationsstigar $C(R)$.

Om $0 < u \leq 1$ är $C(R)$ som i bild a) och om $u > 1$ integrerar vi enligt bild b). Radien $R > 2k + c$ varav alla poler $z = 0, \ldots, -k$ ligger innanför stigen om $0 < u \leq 1$.

Vi visar nu att integrering över de cirkulära delarna av integreringsstigen går mot 0 då $R \to \infty$. Låt $z = x + iy$ och $|z| = R$. Vi uppskattar

$$\left|\frac{u^{-z}}{z(z+1)\cdots(z+k)}\right| = \frac{u^{-x}}{|z||z+1|\cdots|z+k|} \leq \frac{u^{-c}}{R|z+1|\cdots|z+k|}.$$

Olikheten $u^{-x} \leq u^{-c}$ följer från att u^{-x} är en växande funktion (av x) om $0 < u \leq 1$, och en avtagande funktion då $u > 1$. Om $1 \leq n \leq k$ får vi att

$$|z+n| \geq |z| - n = R - n \geq R - k \geq \frac{R}{2},$$

ty $R > 2k$. Därför får vi att integralen domineras av

$$\frac{2\pi R u^{-c}}{R(\frac{R}{2})^k} = CR^{-k} \to 0, \quad \text{då } R \to \infty.$$

Om $u > 1$ så är integranden analytisk innanför $C(R)$, varav $\int_{C(R)} f(z)dz = 0$. Vi erhåller alltså att

$$\int_{c-iT}^{c+iT} \frac{u^{-z}}{z(z+1)\cdots(z+k)} dz = -\int_{C(R_b(T))} \frac{u^{-z}}{z(z+1)\cdots(z+k)} dz$$

där $C(R_b(T))$ är den cirkulära delen i b). Då vi låter $T \to \infty$ är beviset klart.

Om $0 < u \leq 1$ tillämpar vi Sats 3.16. Integranden har poler i $z = 0, \cdots, -k$, varav

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int_{C(R)} \frac{u^{-z}\Gamma(z)}{\Gamma(z+k+1)} dz &= \sum_{n=0}^{k} \operatorname{Res}\left(\frac{u^{-z}\Gamma(z)}{\Gamma(z+k+1)}; -n\right) \\
&= \sum_{n=0}^{k} \frac{u^n}{\Gamma(z+k+1)} \operatorname{Res}(\Gamma(z); -n) \overset{(3.25)}{=} \sum_{n=0}^{k} \frac{u^n(-1)^n}{(k-n)!n!} \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} (-u)^n = \frac{(1-u)^k}{k!}.
\end{aligned}$$

Det gäller alltså enligt Residysatsen att

$$\int_{c-iT}^{c+iT} \frac{u^{-z}}{z(z+1)\cdots(z+k)} dz + \int_{C(R_a(T))} \frac{u^{-z}}{z(z+1)\cdots(z+k)} dz = 2\pi i \frac{(1-u)^k}{k!},$$

där $C(R_a(T))$ är den cirkulära delen i a). Eftersom integrering över den cirkulära integrationsstigen går mot noll då $T \to \infty$ erhåller vi att

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{u^{-z}}{z(z+1)\cdots(z+k)} dz = \frac{1}{k!}(1-u)^k.$$

$\square$

4.3 Alternativ representation för $\psi_1(x)/x^2$

Sats 4.10. *Låt $c > 1$ och $x \geq 1$. Vi har att*

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^{s-1}}{s(s+1)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)ds.$$

Bevis. Enligt Sats 4.7 får vi att $\psi_1(x)/x = \sum_{n\leq x}(1-\frac{n}{x})\Lambda(n)$. Vi använder Lemma 4.8 med $k = 1$ och $u = n/x$, där $n \leq x$ och får att

$$1 - \frac{n}{x} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{(x/n)^s}{s(s+1)}ds.$$

Multiplikation med $\Lambda(n)$ och summering över $n \leq x$ ger att

$$\frac{\psi_1(x)}{x} = \sum_{n\leq x}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\Lambda(n)(x/n)^s}{s(s+1)}ds = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\Lambda(n)(x/n)^s}{s(s+1)}ds,$$

eftersom motsvarande term i integralen försvinner då $n > x$ enligt Lemma 4.8. Detta kan skrivas som

$$\frac{\psi_1(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f_n(s)ds,$$

där $2\pi i f_n(s) = \Lambda(n)(x/n)^s/(s^2+s)$. Efter detta önskar vi byta ordningen mellan integralen och summan. Detta kan vi göra om serien

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} |f_n(s)|ds$$

konvergerar. Vi observerar för detta att seriens delsummor satisfierar olikheten

$$\sum_{n=1}^{N}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\Lambda(n)(x/n)^c}{|s||s+1|}ds = \sum_{n=1}^{N}\frac{\Lambda(n)}{n^c}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{x^c}{|s||s+1|}ds \leq A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^c},$$

där A är en konstant, varav serien konvergerar och vi kan alltså byta ordning mellan integralen och summan. Vi får att

$$\begin{aligned}\frac{\psi_1(x)}{x} &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f_n(s)ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{x^s}{s(s+1)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}ds \\ &\overset{(3.38)}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{x^s}{s(s+1)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)ds.\end{aligned}$$

Påståendet i Sats 4.10 följer då vi dividerar med x.

$\square$

Sats 4.11. *Låt $c > 1$ och $x \geq 1$. Vi har att*

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{s-1}h(s)ds,$$

där

$$h(s) = \frac{1}{s(s+1)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1}\right).$$

Bevis. Vi tillämpar Lemma 4.8 med $k = 2$ och $u = \frac{1}{x}$ och får att

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^s}{s(s+1)(s+2)}ds,$$

där $c > 0$. Då vi substituerar s med $s-1$ i integralen (och låter $c > 1$) och subtraherar resultatet från Sats 4.10 får vi påståendet.

□

Då vi betecknar $s = c + it$ får vi att $x^{s-1} = x^{c-1}x^{it} = x^{c-1}e^{it\log x}$, varav vi enligt föregående sats erhåller att

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{x^{c-1}}{2}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} h(c+it)e^{it\log x}dt. \tag{4.12}$$

Målet är att visa att integralen i (4.12) går mot 0 då $x \to \infty$. Vi börjar med att visa att vi kan ha $c = 1$ i (4.12). Vi börjar med att studera zetafunktionen nära $\mathrm{Re}(s) = \sigma = 1$.

4.4 Övre gränser för $|\zeta(s)|$ och $|\zeta'(s)|$ vid $\sigma = 1$

För att betrakta $\zeta(s)$ vid $\sigma = 1$ använder vi Sats 3.35

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s} - s\int_N^\infty \frac{x - \lfloor x\rfloor}{x^{s+1}}dx + \frac{N^{1-s}}{s-1}, \tag{4.13}$$

där $\sigma > 0$. Vi använder också Korollarium 3.36 för att studera derivatan $\zeta'(s)$, nämligen

$$\begin{aligned}\zeta'(s) = -\sum_{n=1}^{N}\frac{\log n}{n^s} + s\int_N^\infty \frac{(x - \lfloor x\rfloor)\log x}{x^{s+1}}dx - \int_N^\infty \frac{x - \lfloor x\rfloor}{x^{s+1}}dx \\ - \frac{N^{1-s}\log N}{s-1} - \frac{N^{1-s}}{(s-1)^2}.\end{aligned} \tag{4.14}$$

Sats 4.15. *För varje $A > 0$ existerar en konstant $M = M(A)$ så att*

$$|\zeta(s)| \leq M \log t \quad \textit{och} \quad |\zeta'(s)| \leq M \log^2 t$$

för varje $s = \sigma + it$ där $\sigma \geq 1/2$ och

$$\sigma > 1 - \frac{A}{\log t} \quad \textit{och} \quad t \geq e.$$

Bevis. Om $\sigma \geq 2$ får vi att

$$|\zeta(s)| = \Big| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma+it}} \Big| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2)$$

och

$$|\zeta'(s)| = \Big| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log(n)}{n^{\sigma+it}} \Big| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log(n)}{n^2} = \zeta'(2)$$

för alla t. Vi kan alltså anta att $\sigma < 2$ och $t \geq e$. Vi har att

$$|s| \leq \sigma + t \leq 2 + t < 2t \quad \text{och} \quad |s-1| = |\sigma - 1 + it| \geq t,$$

varav $1/|s-1| \leq 1/t$. Då vi uppskattar $\zeta(s)$ genom att använda (4.13) får vi att

$$|\zeta(s)| \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{\sigma}} + 2t \int_N^{\infty} \frac{1}{x^{\sigma+1}} dx + \frac{N^{1-\sigma}}{t} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{\sigma}} + \frac{2t}{\sigma N^{\sigma}} + \frac{N^{1-\sigma}}{t}.$$

Låt $N = \lfloor t \rfloor$. Då har vi att $N \leq t < N+1$ och att $\log n \leq \log t$ om $n \leq N$. Antagandet implicerar att $1 - \sigma < A/\log t$, vilket leder till att

$$\frac{1}{n^{\sigma}} = \frac{n^{1-\sigma}}{n} = \frac{1}{n} e^{(1-\sigma)\log n} < \frac{1}{n} e^{A \log n/\log t} \leq \frac{1}{n} e^{A} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Eftersom $\frac{1}{2} \leq \sigma < 2$ och $t < N+1$ får vi nu alltså att

$$\frac{2t}{\sigma N^{\sigma}} \leq \frac{4(N+1)}{N^{\sigma}} = O(n) \cdot O\left(\frac{1}{n}\right) = O(1) \quad \text{och} \quad \frac{N^{1-\sigma}}{t} = \frac{N}{t} \frac{1}{N^{\sigma}} = O\left(\frac{1}{n}\right) = O(1),$$

varav

$$|\zeta(s)| = O\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\right) + O(1) = O(\log N) + O(1) = O(\log t).$$

Detta bevisar olikheten för $|\zeta(s)|$. För att bevisa olikheten för $|\zeta'(s)|$ använder vi ett motsvarande argument för (4.14).

$\square$

Målet är att visa att $\zeta(1+it) \neq 0$ för alla t. Beviset baserar sig på följande olikhet:

Sats 4.16. *Låt $\sigma > 1$. Vi har att*

$$\zeta^3(\sigma)|\zeta(\sigma+it)|^4|\zeta(\sigma+2it)| \geq 1.$$

Bevis. Vi vet från Sats 3.62 att $\zeta(s) = e^{G(s)}$, där

$$G(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\log n} n^{-s} = \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{ms}},$$

då $\sigma > 1$. Nämligen, om $n = p^m$, så är

$$\frac{\Lambda(n)}{\log n} n^{-s} = \frac{\log p}{m \log p} p^{-sm}.$$

Detta kan skrivas om som

$$\zeta(s) = \exp\left(\sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{ms}}\right) = \exp\left(\sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-imt\log p}}{mp^{m\sigma}}\right),$$

varav vi får att

$$|\zeta(s)| = \exp\left(\sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(mt\log p)}{mp^{m\sigma}}\right).$$

Vi använder denna formel då $s = \sigma$, $s = \sigma + it$ och $s = \sigma + 2it$, varav vi får att

$$\zeta^3(\sigma)|\zeta(\sigma+it)|^4|\zeta(\sigma+2it)| = \exp\left(\sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{3 + 4\cos(mt\log p) + \cos(2mt\log p)}{mp^{m\sigma}}\right).$$

Vi noterar att

$$3 + 4\cos(\theta) + \cos(2\theta) = 2(1+\cos(\theta))^2 \geq 0.$$

Varje uttryck i exponenten är alltså icke-negativ och påståendet följer.

□

Sats 4.17. *$\zeta(1+it) \neq 0$ för alla t.*

Bevis. Eftersom $\zeta(1) = \infty$ räcker det att betrakta $t \neq 0$. Om $\sigma > 1$ ger Sats 4.16 att

$$((\sigma-1)\zeta(\sigma))^3 \left|\frac{\zeta(\sigma+it)}{\sigma-1}\right|^4 |\zeta(\sigma+2it)| \geq \frac{1}{\sigma-1}. \tag{4.18}$$

Låt $\sigma \to 1^+$. Den första faktorn går mot 1, ty $\zeta(s)$ har en enkel pol där residyn är 1 vid $s = 1$. Den tredje faktorn går mot $|\zeta(1 + 2it)|$.

Vi bevisar påståendet med hjälp av en antites: antag att $\zeta(1 + it) = 0$. Då kan vi skriva om den mellersta termen som

$$|\frac{\zeta(\sigma + it) - \zeta(1 + it)}{\sigma - 1}|^4 \to |\zeta'(1 + it)|^4 \quad \text{då } \sigma \to 1^+.$$

Om det för något $t \neq 0$ gäller att $\zeta(1 + it) = 0$ får vi alltså att den vänstra sidan av olikheten (4.18) går mot $|\zeta'(1 + it)|^4 |\zeta(1 + 2it)| < \infty$ då $\sigma \to 1^+$. Detta är en motsägelse eftersom den högra sidan av olikheten går mot ∞.

□

Sats 4.19. *Det existerar en konstant $M > 0$ s.a.*

$$|\frac{1}{\zeta(s)}| < M \log^7 t \quad \textit{och} \quad |\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}| < M \log^9 t,$$

då $\sigma \geq 1$ och $t \geq e$.

Bevis. Om $\sigma \geq 2$ vet vi att

$$|\frac{1}{\zeta(s)}| = |\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \zeta(2)$$

och

$$|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^2} = A < \infty.$$

Vi kan alltså välja $M := \max\{\zeta(2) + 1, A + 1\}$ varav olikheterna uppfylls då $\sigma \geq 2$ och $t \geq e$.

Antag att $1 < \sigma \leq 2$ och $t \geq e$. Vi skriver om olikheten i Sats 4.16 som

$$\frac{1}{|\zeta(\sigma + it)|} \leq \zeta(\sigma)^{3/4} |\zeta(\sigma + 2it)|^{1/4}.$$

Funktionen $(\sigma - 1)\zeta(\sigma)$ är begränsad i intervallet $1 \leq \sigma \leq 2$, varav vi får att

$$\zeta(\sigma) \leq \frac{M}{\sigma - 1},$$

då $1 < \sigma \leq 2$ och M är en lämplig konstant. Enligt Sats 4.15 har vi att $\zeta(\sigma + it) = O(\log t)$ om $1 \leq \sigma \leq 2$, varav det för $1 < \sigma \leq 2$ gäller att

$$\frac{1}{|\zeta(\sigma + it)|} \leq \frac{M^{3/4} K (\log t)^{1/4}}{(\sigma - 1)^{3/4}} = \frac{A (\log t)^{1/4}}{(\sigma - 1)^{3/4}},$$

där A och K är konstanter. Alltså, för en lämplig konstant $B > 0$ gäller att

$$|\zeta(\sigma + it)| > \frac{B(\sigma - 1)^{3/4}}{(\log t)^{1/4}},$$

om $1 < \sigma \leq 2$ och $t \geq e$. Dessutom gäller olikheten trivialt om $\sigma = 1$ och $t \geq e$. Låt nu $\alpha \in (1, 2)$. Om $1 \leq \sigma \leq \alpha$ kan vi tillämpa Sats 4.15, varav vi får att

$$\begin{aligned} |\zeta(\sigma + it) - \zeta(\alpha + it)| &\leq \int_\sigma^\alpha |\zeta'(u + it)| du \leq (\alpha - \sigma) M \log^2 t \\ &\leq (\alpha - 1) M \log^2 t. \end{aligned}$$

Triangelolikheten ger att

$$\begin{aligned} |\zeta(\sigma + it)| &\geq |\zeta(\alpha + it)| - |\zeta(\sigma + it) - \zeta(\alpha + it)| \\ &\geq |\zeta(\alpha + it)| - (\alpha - 1) M \log^2 t \\ &\geq \frac{B(\alpha - 1)^{3/4}}{(\log t)^{1/4}} - (\alpha - 1) M \log^2 t. \end{aligned}$$

Eftersom $(\sigma - 1)^{3/4} \geq (\alpha - 1)^{3/4}$ gäller då $\alpha \leq \sigma \leq 2$, så får vi att

$$|\zeta(\sigma + it)| \geq \frac{B(\alpha - 1)^{3/4}}{(\log t)^{1/4}} - (\alpha - 1) M \log^2 t$$

om $1 \leq \sigma \leq 2$, $t \geq e$ och $1 < \alpha < 2$.

Låt

$$\alpha = 1 + \left(\frac{B}{2M}\right)^4 \frac{1}{(\log t)^9}.$$

Vi noterar att $\alpha > 1$ och att $\alpha < 2$ om $t > t_0$ för något lämpligt t_0. Om $t \geq t_0$ och $1 \leq \sigma \leq 2$ så gäller alltså att

$$|\zeta(\sigma + it)| \geq (\alpha - 1) M \log^2 t = \frac{C}{\log^7 t}.$$

Olikheten gäller även (med en annan konstant C) då $e \leq t \leq t_0$. Detta bevisar det första påståendet. För att bevisa det andra påståendet tillämpar vi Sats 4.15 för att få en extra faktor $\log^2 t$.

$\square$

4.5 Slutföring av beviset av primtalssatsen

Lemma 4.20. *Om $f(s)$ har en pol av ordningen k i $s = \alpha$ så har kvoten $f'(s)/f(s)$ en pol av ordningen 1 i $s = \alpha$ med residyn $-k$.*

Bevis. Vi har att $f(s) = g(s)/(s-\alpha)^k$ där g är analytisk omkring α och $g(\alpha) \neq 0$. För alla s i en lämplig omgivning av α gäller att

$$f'(s) = \frac{g'(s)}{(s-\alpha)^k} - \frac{kg(s)}{(s-\alpha)^{k+1}} = \frac{g(s)}{(s-\alpha)^k}\left(\frac{-k}{s-\alpha} + \frac{g'(s)}{g(s)}\right).$$

Från detta får vi att

$$\frac{f'(s)}{f(s)} = \frac{-k}{s-\alpha} + \frac{g'(s)}{g(s)}.$$

Detta bevisar påståendet ty $g'(s)/g(s)$ är analytisk omkring $s = \alpha$. □

Sats 4.21. *Funktionen*

$$F(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1}$$

är analytisk vid $s = 1$.

Bevis. Enligt Lemma 4.20 har $-\zeta'(s)/\zeta(s)$ en första ordningens pol vid $s = 1$ med residyn 1, precis som funktionen $1/(s-1)$, varav deras differens är analytisk vid $s = 1$. □

Nu är vi färdiga att slutföra beviset.

Sats 4.22. *För $x \geq 1$ gäller att*

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} h(1+it)e^{it\log x}dt,$$

där $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(1+it)|dt$ konvergerar. Enligt Riemann-Lebesgues lemma får vi alltså att

$$\psi_1(x) \sim \frac{1}{2}x^2 \quad \text{då } x \to \infty$$

vilket bevisar primtalssatsen enligt satserna 4.7 och 2.10.

Bevis. Om $c > 1$ och $x \geq 1$ har vi enligt Sats 4.11 att

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{s-1}h(s)ds,$$

där
$$h(s) = \frac{1}{s(s+1)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1}\right).$$
Vi önskar visa att vi kan flytta integrationsstigen till $\sigma = 1$. Vi använder (3.10) för att studera
$$\int_R x^{s-1}h(s)ds,$$
där R är rektangeln i bild 5.

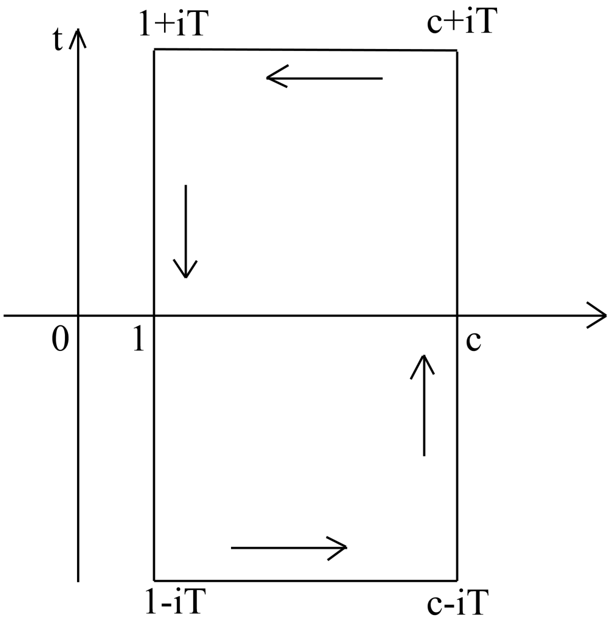

Bild 5. Integrationsstigen R.

Eftersom funktionen $x^{s-1}h(s)$ är analytisk inuti R enligt sats 4.21 får vi alltså att
$$\int_R x^{s-1}h(s)ds = 0.$$
Nu kan vi dela upp integralen i fyra delar. Vi får alltså att
$$0 = \int_R = \int_{c-iT}^{c+iT} - \int_{1-iT}^{1+iT} + \int_{c+iT}^{1+iT} + \int_{1-iT}^{c-iT}.$$
Vi visar att integrering över de vågräta delarna av rektangeln går mot 0 då $T \to \infty$, vilket ger att
$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{s-1}h(s)ds = \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} x^{s-1}h(s)ds.$$

Symmetrin implicerar att det räcker att betrakta $t = T$, situationen $t = -T$ är analog. Om $s = \sigma + iT$ så ger triangelolikheten att

$$|\frac{1}{s(s+1)}| \leq \frac{1}{T^2} \quad \text{och} \quad |\frac{1}{s(s+1)(s-1)}| \leq \frac{1}{T^3} \leq \frac{1}{T^2}.$$

Enligt Sats 4.19 existerar det en konstant M s.a. $|\zeta'(s)/\zeta(s)| \leq M \log^9 t$ om $t \geq e$ och $\sigma \geq 1$. Om $T \geq e$ får vi att

$$|h(s)| \leq \frac{M' \log^9 T}{T^2},$$

varav

$$|\int_1^c x^{s-1} h(s) ds| \leq \int_1^c x^{c-1} \frac{M' \log^9 T}{T^2} d\sigma = M' x^{c-1} \frac{\log^9 T}{T^2}(c-1) \to 0,$$

då $T \to \infty$. Vi har alltså visat att

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{s-1} h(s) ds = \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} x^{s-1} h(s) ds.$$

Vi betecknar $s = 1 + it$ och erhåller att

$$\int_{1-i\infty}^{1+i\infty} x^{s-1} h(s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} h(1+it) e^{it \log x} dt.$$

Integralen $\int_{-\infty}^{\infty} |h(1+it)| dt$ kan uppdelas som

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(1+it)| dt = \int_{-e}^{e} + \int_{e}^{\infty} + \int_{-\infty}^{-e}.$$

Då vi integrerar från e till ∞ har vi att

$$|h(1+it)| \leq \frac{M \log^9 t}{t^2},$$

varav $\int_e^\infty |h(1+it)| dt$ konvergerar. På motsvarande sätt konvergerar integralen $\int_{-\infty}^{-e} |h(1+it)| dt$, varav $\int_{-\infty}^{\infty} |h(1+it)| dt$ konvergerar. Vi kan alltså tillämpa Sats 3.19, varav vi får att $\psi_1(x) \sim x^2/2$ då $x \to \infty$. Enligt Sats 4.7 får vi att $\psi(x) \sim x$ då $x \to \infty$. Enligt Sats 2.10 bevisar detta primtalssatsen.

$\square$

Som en omedelbar följd av primtalssatsen erhåller vi några intressanta följder. Vi kan bl.a. enkelt approximera det n:te primtalet.

Korollarium 4.23. *Låt p_n vara det n:te primtalet. Då gäller det att $p_n \sim n \log n$.*

Bevis. Eftersom $\pi(p_n) = n$ får vi ur PTS att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \log p_n}{p_n} = 1. \tag{4.24}$$

Genom att ta logaritmen i (4.24) erhåller vi att

$$\lim_{n\to\infty} \log\left(\frac{n \log p_n}{p_n}\right) = \lim_{n\to\infty} (\log n + \log\log p_n - \log p_n) = 0,$$

och division med $\log p_n$ ger

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n + \log\log p_n}{\log p_n} = 1.$$

Det är klart att $\lim_{n\to\infty} \log\log p_n / \log p_n = 0$ eftersom

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 0,$$

och vi får att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{\log p_n} = 1. \tag{4.25}$$

Då vi kombinerar (4.24) och (4.25) erhåller vi att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \log p_n}{p_n} \cdot \frac{\log n}{\log p_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \log n}{p_n} = 1.$$

□

Som en omedelbar följd av Korollarium 4.23 får vi följande resultat.

Korollarium 4.26. *Det gäller att*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = 1.$$

Resultatet kan tolkas, på samma sätt som Sats 1.2, som att primtal förekommer mycket ofta.

Kapitel 5

Zetafunktionens nollställen och fördelningen av primtal

Det visar sig att zetafunktionens nollställen och distributionen av primtal är sammanknutna på ett icke-trivialt sätt. Syftet med detta kapitel är att diskutera den s.k. Riemannhypotesen, eftersom den är en naturlig fortsättning av primtalssatsen. Vi börjar med att undersöka zetafunktionens nollställen. I kap. 3 visade vi i Riemanns funktionalekvation att det för alla $s \in \mathbb{C}$ gäller att

$$\zeta(s) = \left[2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\right] \zeta(1-s).$$

Sats 5.1. *$\zeta(s) \neq 0$ då $\sigma \geq 1$ och $\zeta(s) = 0$ i halvplanet $\{s : \sigma \leq 0\}$ då $s = -2, -4, \ldots$*

Bevis. För det första påståendet kombinerar vi resultaten från Korollarium 3.34 och Sats 4.17. Låt $\sigma < 0$ och anta att $\zeta(s) = 0$. Då gäller att $\zeta(1-s) \neq 0$ och Sats 3.41 ger att $\sin(\frac{\pi s}{2})\Gamma(1-s) = 0$, och eftersom $\Gamma(1-s) \neq 0$ får vi att $\sin(\frac{\pi s}{2}) = 0$. Detta ger att $s = -2k$, $n \in \mathbb{N}$. □

Nollställena $s = -2, -4, \ldots$ är zetafunktionens *triviala nollställen.* För att studera zetafunktionens nollställen introducerar vi några nya funktioner. Då vi substituerar $s = 1 - s$ i funktionalekvationen (3.41) får vi från definitionen för sinus och cosinus i $\mathbb{C}$ att

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s}\pi^{-s} \sin\left(\frac{\pi(1-s)}{2}\right) \Gamma(s)\zeta(s) = 2^{1-s}\pi^{-s} \cos\frac{\pi s}{2}\Gamma(s)\zeta(s).$$

Vi kan skriva om den ursprungliga funktionalekvationen som $\zeta(s) = \chi(s)\zeta(1-s)$, där

$$\chi(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\frac{s\pi}{2}\Gamma(1-s)$$

och $\chi(s)\chi(1-s)=1$, eftersom det enligt definitionen gäller att

$$\zeta(1-s)=\chi(1-s)\zeta(s)$$

vilket ger att $\chi(s)=(\chi(1-s))^{-1}$.

Då vi definierar

$$\xi(s):=\frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma(\frac{1}{2}s)\zeta(s)$$

ser vi ur funktionalekvationen, speciellt i formen (3.45), att $\xi(s)=\xi(1-s)$. Vi definierar

$$\Xi(t):=\xi\left(\frac{1}{2}+it\right)$$

och erhåller att $\Xi(t)=\Xi(-t)$ eftersom $1/2-it=1-(1/2+it)$. Funktionalekvationen (3.41) är alltså ekvivalent med att $\Xi(t)$ är en jämn funktion. I beviset av funktionalekvationen (3.41) härledde vi att

$$\pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma(\frac{1}{2}s)\zeta(s)=\frac{1}{s(s-1)}+\int_1^\infty(x^{-\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}s-1})\psi(x)dx,$$

där $\psi(x)=\sum_{n=1}^\infty e^{-n^2\pi x}$. Då vi multiplicerar med $\frac{1}{2}s(s-1)$ och substituerar $s=\frac{1}{2}+it$ erhåller vi att

$$\Xi(t)=\frac{1}{2}-\left(t^2+\frac{1}{4}\right)\int_1^\infty\psi(x)x^{-\frac{3}{4}}\cos\frac{t\log x}{2}dx.$$

Vi ser att $\Xi(t)$ är reell om t är reell.

Nu vill vi studera integraler av formen

$$\Phi(x)=\int_0^\infty f(t)\Xi(t)\cos xtdt.$$

Anta att ϕ är analytisk och satisfierar $\overline{\phi(it)}=\phi(-it)$ samt att $f(t)=|\phi(t)|^2$. Om $y=e^x$ erhåller vi att

$$\begin{aligned}
\Phi(x) &= \int_0^\infty f(t)\Xi(t)\cos xt dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \phi(it)\phi(-it)\Xi(t)\cos xt dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \phi(it)\phi(-it)\Xi(t)\frac{1}{2}\left(e^{ixt}+e^{-ixt}\right)dt \\
&\overset{y=e^x}{=} \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \phi(it)\phi(-it)\Xi(t)\frac{1}{2}\left(y^{it}+y^{-it}\right)dt \overset{\text{symmetri}}{=} \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \phi(it)\phi(-it)\Xi(t)y^{it}dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \phi(it)\phi(-it)\xi\left(\frac{1}{2}+it\right)y^{it}dt \\
&\overset{s=1/2+it}{=} \frac{1}{2i\sqrt{y}}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \phi\left(s-\frac{1}{2}\right)\phi\left(\frac{1}{2}-s\right)\xi(s)y^s ds \\
&= \frac{1}{2i\sqrt{y}}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \phi\left(s-\frac{1}{2}\right)\phi\left(\frac{1}{2}-s\right)\frac{s}{2}(s-1)\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\pi^{-\frac{1}{2}s}\zeta(s)y^s ds \\
&\overset{(3.22)}{=} \frac{1}{2i\sqrt{y}}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \phi\left(s-\frac{1}{2}\right)\phi\left(\frac{1}{2}-s\right)(s-1)\Gamma\left(1+\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{1}{2}s}\zeta(s)y^s ds.
\end{aligned}$$

För att studera integralen vidare behöver vi ett klassiskt resultat ur Fourieranalysen.

Sats 5.2. ***(Mellins inversion)***[1] *Låt $y \mapsto y^{\sigma-1}f(y)$ vara integrerbar i $(0,\infty)$, och låt f vara begränsad i en omgivning av punkten $y = x$. Låt*

$$\mathfrak{F}(s) = \int_0^\infty f(y)y^{s-1}dy \qquad (s = \sigma + it).$$

Då gäller det att

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \mathfrak{F}(s)x^{-s}ds.$$

Lemma 5.3.

$$\int_0^\infty \frac{\Xi(t)}{t^2+\frac{1}{4}}\cos xt dt = \frac{\pi}{2}\left(e^{\frac{1}{2}x} - 2e^{-\frac{1}{2}x}\psi(e^{-2x})\right).$$

Bevis. Vi väljer ovan $\phi(s) = 1/(s+\frac{1}{2})$ och använder att $\Gamma(1+s/2) = \frac{1}{2}s\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)$, vilket ger att

$$\begin{aligned}
\Phi(x) &= \frac{1}{2i\sqrt{y}}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{1-s}\cdot(s-1)\Gamma\left(1+\frac{1}{2}s\right)\pi^{-\frac{1}{2}s}\zeta(s)y^s ds \\
&\overset{(3.22)}{=} -\frac{1}{4i\sqrt{y}}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\pi^{-\frac{1}{2}s}\zeta(s)\left(y^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}s} ds.
\end{aligned}$$

[1] Beviset förbigås, se [Tit48] Theorem 28.

I beviset för Sats 3.41 härledde vi att

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\pi^{-\frac{1}{2}s}\zeta(s) = \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}s-1}\psi(x)dx$$

då $\sigma > 1$. Nu kan vi alltså tillämpa Sats 5.2 med funktionerna $f(x) = \psi(x)$ och $\mathfrak{F}(s) = \pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(2s)$ där $\sigma > 1/2$. Funktionen $\mathfrak{F}(s)$ är analytisk i halvplanet $\sigma > 0$. Zetafunktionen $\zeta(s)$ har en pol med residyn 1 i punkten $s = 1$. Nu vill vi tillämpa Residysatsen på funktionen $\mathfrak{F}(s)\left(y^{-2}\right)^{-s}$. Låt $\epsilon > 0$. Vi integrerar funktionen $\mathfrak{F}(s)\left(y^{-2}\right)^{-s}$ över en sluten rektangel, vars hörnpunkter är $\frac{1}{2} - iT$, $\frac{1}{2} + iT$, $1 + \epsilon + iT$ och $1 + \epsilon - iT$, och låter sedan $T \to \infty$. Nu vill vi visa att integration över de vågräta delarna går mot noll då $T \to \infty$.

Enligt Sats 3.35 vet vi att

$$\zeta(s) = \zeta\left(\sigma + it\right) = O\left(|\sigma + it|\int_1^\infty \frac{x - \lfloor x\rfloor}{x^{\sigma+1+it}}dx\right) + O(1) = O(t).$$

Enligt *Stirlings formel* för gammafunktionen[2] gäller det att

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi}z^{z-\frac{1}{2}}e^{-z}e^{J(z)},$$

där $J(z) \to 0$ då $z \to \infty$. Storleksordningen bestäms av termen z^z i området $\frac{1}{2} \le \sigma \le 1 + \epsilon$. Om vi alltså betraktar funktionen $\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)$ i området $\frac{1}{2} \le \sigma \le 1 + \epsilon$, får vi att den dominerande termen är

$$\exp\left(\left(\frac{\sigma}{2} + \frac{it}{2}\right)\left(\log\left|\frac{\sigma}{2} + \frac{it}{2}\right| + i\arg\left(\frac{\sigma}{2} + \frac{it}{2}\right)\right)\right).$$

Dess modul är väsentligen

$$\exp\left(\frac{\sigma}{2}\log\left|\frac{\sigma}{2} + \frac{it}{2}\right| - \frac{t}{2}\theta_t\right),$$

där $\theta_t = \arg\left(\frac{\sigma}{2} + \frac{it}{2}\right) \to \frac{\pi}{2}$ då $t \to \infty$. Vi ser att $\Gamma\left(\frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}it\right) = O(e^{-\frac{1}{4}\pi t})$.

Det gäller alltså att

$$|\mathfrak{F}(s)\left(y^{-2}\right)^{-s}| \le CTe^{-\frac{\pi}{2}2T},$$

och vi får att

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1+\epsilon} |\mathfrak{F}(\sigma + it)\left(y^{-2}\right)^{-\sigma-it}|d\sigma \le C\int_{\frac{1}{2}}^{1+\epsilon} Te^{-\pi T}d\sigma = C'Te^{-\pi T} \overset{T\to\infty}{\to} 0.$$

[2]Se t.ex. [Ahl] kap. 5.2.5.

Vi ser alltså att integration över de vågräta delarna går mot noll, och Residysatsen ger alltså att

$$\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \mathfrak{F}\left(\frac{1}{2}s\right)\left(y^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}s} ds + \int_{1+\epsilon+i\infty}^{1+\epsilon-i\infty} \mathfrak{F}\left(\frac{1}{2}s\right)\left(y^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}s} ds$$

$$= (-1)\cdot 2\pi i \operatorname{Res}\left(\mathfrak{F}\left(\frac{1}{2}s\right)\left(y^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}s}; 1\right).$$

Nu kan vi beräkna residyn, och vi får att

$$\begin{aligned}(-1)\cdot 2\pi i \operatorname{Res}\left(\mathfrak{F}\left(\frac{1}{2}s\right)\left(y^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}s}; 1\right) &= -2\pi i \lim_{s\to 1}(s-1)\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\pi^{-\frac{1}{2}s}\zeta(s)\left(y^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}s} \\ &= -2\pi i\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\pi^{-\frac{1}{2}}\left(y^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta(s)\right) \\ &= -2\pi i y.\end{aligned}$$

Vi erhåller att

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \mathfrak{F}\left(\frac{1}{2}s\right)\left(y^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}s} ds &= -2\pi i y + \int_{1+\epsilon-i\infty}^{1+\epsilon+i\infty} \mathfrak{F}\left(\frac{1}{2}s\right)\left(y^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}s} ds \\ &= 2\int_{1+\epsilon-i\infty}^{1+\epsilon+i\infty} \mathfrak{F}(s)\left(y^{-2}\right)^{-s} ds - 2\pi i y \\ &= 2\cdot 2\pi i\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{1+\epsilon-i\infty}^{1+\epsilon+i\infty} \mathfrak{F}(s)\left(y^{-2}\right)^{-s} ds\right) - 2\pi i y \\ &\overset{(5.2)}{=} 4\pi i\psi\left(y^{-2}\right) - 2\pi i y.\end{aligned}$$

Vi får alltså att

$$\Phi(x) = -\frac{1}{4i\sqrt{y}}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\pi^{-\frac{1}{2}s}\zeta(s)\left(y^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}s} ds = -\frac{\pi}{\sqrt{y}}\psi\left(\frac{1}{y^2}\right) + \frac{\pi\sqrt{y}}{2},$$

och då vi substituerar $y = e^x$ får vi slutligen att

$$\int_0^\infty \frac{\Xi(t)}{t^2+\frac{1}{4}}\cos xt dt = \frac{\pi}{2}\left(e^{\frac{1}{2}x} - 2e^{-\frac{1}{2}x}\psi(e^{-2x})\right).$$

□

Argumentet till nedanstående klassiska resultat följer [Tit51].

Sats 5.4. ***(Hardys sats, 1914)*** *$\zeta(s)$ har oändligt många nollställen på* kritiska linjen $\{s : \sigma = \frac{1}{2}\}$.

Bevis. Vi har att

$$\Xi(t) = \xi\left(\frac{1}{2} + it\right) = -\frac{1}{2}\left(t^2 + \frac{1}{4}\right)\pi^{-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}it}\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}it\right)\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right),$$

där $\Xi(t)$ är en jämn funktion av t, som är reell för reella t. Om alltså $\zeta(s)$ har ett nollställe på den kritiska linjen har även $\Xi(t)$ ett motsvarande nollställe. Vi bör alltså visa att $\Xi(t)$ har oändligt många nollställen. Då vi substituerar $x = -i\alpha$ i Lemma 5.3 erhåller vi att

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\Xi(t)}{t^2 + \frac{1}{4}}\cosh\alpha t dt = e^{-\frac{1}{2}i\alpha} - 2e^{\frac{1}{2}i\alpha}\psi(e^{2i\alpha}) = 2\cos\frac{\alpha}{2} - 2e^{\frac{1}{2}i\alpha}\left(\frac{1}{2} + \psi(e^{2i\alpha})\right).$$

Genom att tillämpa Stirlings formel och Sats 3.35 på motsvarande sätt som på s.57 erhåller vi att $\Xi(t) = O(t^A e^{-\frac{1}{4}\pi t})$. Integralen ovan kan deriveras godtyckligt många gånger med avseende på α, förutsatt att $\alpha < \frac{\pi}{4}$, eftersom

$$|\Xi(t)|\cosh(\alpha t) \leq Ct^A e^{-\frac{1}{4}\pi t}e^{\alpha t} = Ct^A e^{t(\alpha - \frac{\pi}{4})},$$

och integralen konvergerar alltså absolut om $\alpha < \frac{\pi}{4}$. Vi erhåller att

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\Xi(t)}{t^2 + \frac{1}{4}}t^{2n}\cosh\alpha t dt = \frac{(-1)^n\cos\frac{\alpha}{2}}{2^{2n-1}} - 2\left(\frac{d}{d\alpha}\right)^{2n} e^{\frac{1}{2}i\alpha}\left(\frac{1}{2} + \psi(e^{2i\alpha})\right).$$

Nu visar vi att för varje fixerat n går den sista termen mot noll då $\alpha \to \frac{1}{4}\pi$. Ekvation (3.44) ger funktionalekvationen

$$2\psi(x) + 1 = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(2\psi\left(\frac{1}{x}\right) + 1\right),$$

som vi kan skriva om som

$$\psi(x) = x^{-\frac{1}{2}}\psi\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}.$$

Vi får alltså att

$$\begin{aligned}\psi(i+\delta) &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi(i+\delta)} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-n^2\pi\delta} \\ &= 2\psi(4\delta) - \psi(\delta) = \frac{1}{\sqrt{\delta}}\psi\left(\frac{1}{4\delta}\right) - \frac{1}{\sqrt{\delta}}\psi\left(\frac{1}{\delta}\right) - \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Ur detta ser vi att $\frac{1}{2}+\psi(x)$ går mot noll då $\delta \to 0^+$, d.v.s. då $x \to i$ och $|\arg(x-i)| < \frac{1}{2}\pi$. Nämligen, exempelvis, om $\delta > 0$ så gäller att

$$C\frac{1}{\sqrt{\delta}}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi}{\delta}} \leq \frac{C'}{\sqrt{\delta}}\frac{e^{-\pi/\delta}}{1-e^{-\pi/\delta}} \overset{\delta\to 0}{\to} 0.$$

Ett liknande argument kan göras för derivatorna.

Vi har alltså visat att

$$\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{4}} \int_0^{\infty} \frac{\Xi(t)}{t^2+\frac{1}{4}} t^{2n} \cosh\alpha t dt = \frac{(-1)^n \pi \cos\frac{\pi}{8}}{2^{2n}}. \tag{5.5}$$

Vi gör antagandet att $\Xi(t) > 0$ då $t \geq T$. Fallet då $\Xi(t) < 0$ då $t \geq T$ är motsvarande. Då gäller det att

$$\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{4}} \int_0^{\infty} \frac{\Xi(t)}{t^2+\frac{1}{4}} t^{2n} \cosh\alpha t dt := L.$$

Vi vet att $\cosh(\alpha t) > 0$ för alla t. Då gäller det att

$$\int_T^{T'} \frac{\Xi(t)}{t^2+\frac{1}{4}} t^{2n} \cosh\alpha t dt \leq L$$

för alla $\alpha < \frac{\pi}{4}$ och $T' > T$. Då vi låter $\alpha \to \frac{\pi}{4}$ erhåller vi att

$$\int_T^{T'} \frac{\Xi(t)}{t^2+\frac{1}{4}} t^{2n} \cosh\frac{\pi t}{4} dt \leq L$$

för alla $T' > T$, alltså konvergerar integralen

$$\int_0^{\infty} \frac{\Xi(t)}{t^2+\frac{1}{4}} t^{2n} \cosh\frac{\pi t}{4} dt.$$

Integralen i (5.5) konvergerar alltså likformigt i avseende på α om $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$, och det gäller att

$$\int_0^{\infty} \frac{\Xi(t)}{t^2+\frac{1}{4}} t^{2n} \cosh\frac{\pi t}{4} dt = \frac{(-1)^n \pi \cos\frac{\pi}{8}}{2^{2n}} \tag{5.6}$$

för alla n. Detta är dock omöjligt, ty om n är udda så är integralen i (5.6) negativ, eftersom den högra sidan i (5.6) är mindre än noll, och

$$\int_T^{\infty} \frac{\Xi(t)}{t^2+\frac{1}{4}} t^{2n} \cosh\frac{\pi t}{4} dt < -\int_0^{T} \frac{\Xi(t)}{t^2+\frac{1}{4}} t^{2n} \cosh\frac{\pi t}{4} dt < KT^{2n},$$

där K är oberoende av n. Enligt antagandet existerar det en positiv konstant $m = m(T)$ så att $\Xi(t)/(t^2 + \frac{1}{4}) \geq m$ om $2T \leq t \leq 2T + 1$. Alltså får vi att

$$\int_T^\infty \frac{\Xi(t)}{t^2 + \frac{1}{4}} t^{2n} \cosh \frac{\pi t}{4} dt \geq \int_{2T}^{2T+1} m t^{2n} dt \geq m(2T)^{2n}.$$

Vi erhåller alltså att $m2^{2n} < K$, vilket är en motstridighet då n är tillräckligt stort.

□

Nu vet vi alltså att de icke-triviala nollställena ligger i det *kritiska bandet* $\{s : 0 < \sigma < 1\}$ och att det finns oändligt många nollställen på den kritiska linjen. Låt $N_0(T)$ beteckna antalet nollställen på den kritiska linjen, d.v.s. nollställen av formen $\frac{1}{2} + it$ $(0 < t \leq T)$. Hardy och Littlewood visade att $N_0(T) > AT$ och Selberg visade att $N_0(T) > AT \log T$.

Conrey, Iwaniec och Soundarajan har visat att minst 56% av zetafunktionens nollställen ligger på den kritiska linjen [CIS]. Dessutom har de la Vallée Poussin visat år 1899 att $\zeta(\sigma + it) \neq 0$ i området

$$1 - \sigma \leq \frac{c}{\log |t|}.$$

Resultatet har förbättrats sen dess, och K. Ford [Ford] har visat att området kan utökas till

$$1 - \sigma \leq \frac{1}{57,54(\log |t|)^{2/3}(\log \log |t|)^{1/3}}, \quad |t| \geq 3.$$

Vet man mer exakt var nollställena ligger?

Förmodan 5.7. (Riemannhypotesen) Alla nollställen till $\zeta(s)$ i det kritiska bandet $\{s : 0 < \sigma < 1\}$ ligger på den kritiska linjen $\{s : \sigma = \frac{1}{2}\}$.

Riemannhypotesen (RH) är definitivt en av de viktigaste öppna frågorna inom matematiken. Problemet har förblivit olöst sedan 1859, då Riemann publicerade sin artikel. Riemannhypotesen är det 8:nde problemet av Hilberts berömda lista på 23 problem, som presenterades den 8 augusti 1900 i Sorbonne. Hundra år senare, 24:e maj 2000, instiftade *Clay Mathematics institute* millenniumpriset. Millenniumproblemen består av sju matematiska problem, av vilka sex är olösta, inklusive Riemannhypotesen. Lösningen till varje problem belönas med en miljon amerikanska dollar.

Det visar sig att Riemannhypotesen är ekvivalent med (minst) ett påstående angående primtal. Vi avslutar avhandlingen genom att bevisa den kanske viktigare implikationen i en klassisk ekvivalens.

5.1 Distributionen av primtal

Definition 5.8. Låt $x \geq 2$. Vi definierar den *logaritmiska integralen* Li som

$$\mathrm{Li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\log t}.$$

Gauss gissade att

$$\mathrm{Li}(x) \approx \pi(x) \quad \text{då } x \text{ är tillräckligt stor.}$$

Eftersom $\mathrm{Li}(x) \to \infty$ och $x/\log x \to \infty$ då $x \to \infty$ kan vi använda l'Hospitals regel, och vi får att

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{Li}(x)}{x/\log x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/\log x}{\frac{\log x - 1}{\log^2 x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\log^2 x}{\log^2 x - \log x} = 1.$$

I enlighet med primtalssatsen erhåller vi alltså att

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\mathrm{Li}(x)} = 1.$$

Det visar sig att $\mathrm{Li}(x)$ approximerar $\pi(x)$ mycket bättre än $x/\log x$. Hur mycket avviker alltså $\mathrm{Li}(x)$ från $\pi(x)$?

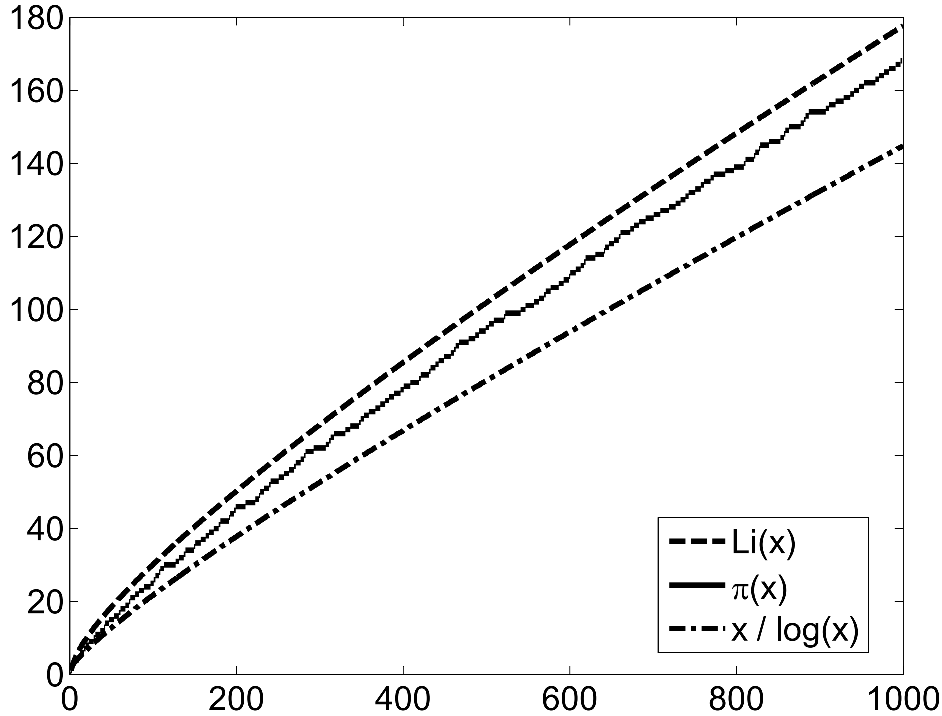

Bild 6. Funktionerna $\mathrm{Li}(x)$, $\pi(x)$ och $x/\log x$.

Definition 5.9. Vi definierar restfunktionen som

$$r(x) = \pi(x) - \mathrm{Li}(x).$$

de la Vallée Poussin har visat att

$$|r(x)| \leq xe^{-c\sqrt{\log x}}.$$

Den svenska matematikern *Helge von Koch* visade 1901 följande resultat [Koch]. Satsen kan tolkas som att Riemannhypotesen är ekvivalent med ett starkare påstående än primtalssatsen.

Sats 5.10.

$$RH \quad \Leftrightarrow \quad |r(x)| \leq c\sqrt{x}\log x.$$

Anmärkning 5.11. År 1976 visade L. Schoenfeld [Scho] att $RH \Leftrightarrow |r(x)| \leq \frac{\sqrt{x}\log x}{8\pi}$ då $x \geq 2657$.

Beviset av v.Kochs resultat förbigås eftersom det är invecklat. Låt $RH(x) := \sqrt{x}\log x/8\pi$. Om alltså $|r(x)| > RH(x)$ för något $x \geq 2657$, så är Riemannhypotesen falsk. Då vi beräknar felet i primtalssatsen upp till 10^7 erhåller vi följande resultat.

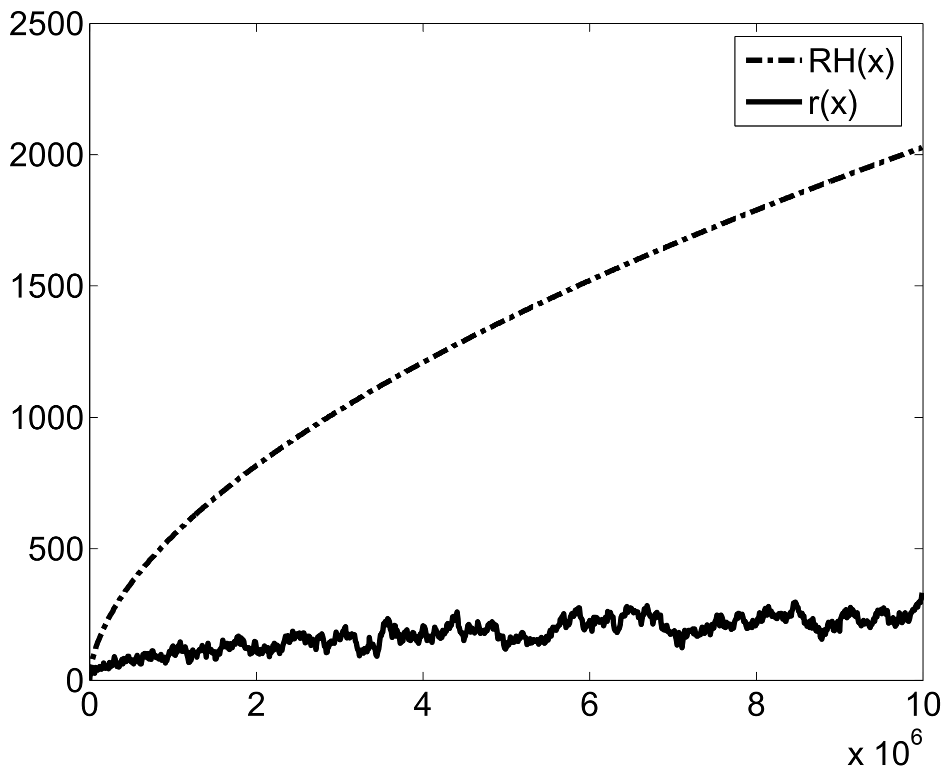

Bild 7. Felet i primtalssatsen.

Numeriska beräkningar tyder på att Riemannhypotesen är sann vilket vi kan se i bild 7. I projektet *Zetagrid* [Zetagrid] har man visat att Riemannhypotesen är sann i området $|\operatorname{Im}(s)| < 29538618432$. Numeriska beräkningar är dock inte fullständiga bevis, och det är trots allt möjligt att Riemannhypotesen ändå är falsk, se t.ex. [Ivic].

Vi avslutar denna avhandling med att bevisa ett liknande resultat som i Sats 5.10. Resultatet är inte bara lättare att bevisa utan lämpar sig också bättre för att bevisa Riemannhypotesen. Argumentet kommer från [Nev]. För beviset bör vi känna till den s.k. *Riemann-Stieltjes*-integralen och dess egenskaper, se t.ex. [Rud].

Definition 5.12. Låt $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ vara en monoton och växande funktion. Till varje delning $D = \{x_0, \dots x_n\}$ av $[a,b]$, där $a = x_0 < x_1 \cdots < x_n = b$, skriver vi $\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}) \geq 0$. För en reell funktion f som är begränsad i intervallet $[a,b]$ definierar vi

$$U(D, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\alpha_i,$$

$$L(D, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta\alpha_i,$$

där $m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$ och $M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$, $x_{i-1} \leq x \leq x_i$. Vi definierar

$$\overline{\int_a^b} f d\alpha = \inf_D U(D, f, \alpha),$$

$$\underline{\int_a^b} f d\alpha = \sup_D L(D, f, \alpha),$$

där vi tar inf och sup över delningarna D av $[a,b]$. Om $\inf_D U(D,f,\alpha) = \sup_D L(D,f,\alpha)$ betecknar vi deras gemensamma värde med

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f(x) d\alpha(x)$$

och säger att f är Riemann-Stieltjes-integrerbar över $[a,b]$ med avseende på α. Vi betecknar detta med $f \in \mathscr{R}(\alpha)$.

Om man väljer $\alpha(x) = x$ ser vi att den vanliga Riemann-integralen är ett specialfall av Riemann-Steltjes-integralen (ibland Stieltjes-integralen). Om g är Riemann-integrerbar betecknar vi $g \in \mathscr{R}$. Stieltjes-integralen har många egenskaper som liknar Riemann-integralens egenskaper. Vi presenterar endast de egenskaper som behövs för att bevisa Sats 5.14. För bevis se exempelvis [Rud].

Sats 5.13. *(a) Om* $f_1, f_2 \in \mathscr{R}(\alpha)$ *i* $[a,b]$ *så gäller det att* $f_1 + f_2 \in \mathscr{R}(\alpha)$, $cf_1 \in \mathscr{R}(\alpha)$ *för varje konstant* c *och*

$$\int_a^b (f_1 + f_2)d\alpha = \int_a^b f_1 d\alpha + \int_a^b f_2 d\alpha, \qquad \int_a^b cf_1 d\alpha = c\int_a^b f_1 d\alpha.$$

(b) Om $f_1 \leq f_2$ *i* $[a,b]$ *så är*

$$\int_a^b f_1 d\alpha \leq \int_a^b f_2 d\alpha.$$

(c) Om $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ *i intervallet* $[a,b]$ *och* $a < c < b$, *så är* $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ *i intervallen* $[a,c]$ *och* $[c,b]$, *och*

$$\int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha = \int_a^b f d\alpha.$$

(d) Om $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ *i intervallet* $[a,b]$ *och om* $|f(x)| \leq M$, *så är*

$$\left| \int_a^b f d\alpha \right| \leq M\left(\alpha(b) - \alpha(a)\right).$$

(e) Om $f \in \mathscr{R}(\alpha_1)$ *och* $f \in \mathscr{R}(\alpha_2)$, *så är* $f \in \mathscr{R}(\alpha_1 + \alpha_2)$ *och*

$$\int_a^b f d(\alpha_1 + \alpha_2) = \int_a^b f d\alpha_1 + \int_a^b f d\alpha_2.$$

Om $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ *och* c *är en positiv konstant, så är* $f \in \mathscr{R}(c\alpha)$ *och*

$$\int_a^b f d(c\alpha) = c\int_a^b f d\alpha.$$

(f) Anta att α *är monoton och växande och* $\alpha' \in \mathscr{R}$ *i intervallet* $[a,b]$. *Låt* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *vara begränsad. Då är* $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ *om och endast om* $f\alpha' \in \mathscr{R}$. *Dessutom gäller att*

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f(x)\alpha'(x)dx.$$

(g) ***(Partiell integrering)*** *Anta att* α *växer monotont i intervallet* $[a,b]$*och att* $G' = g$ *där* g *är kontinuerlig i* $[a,b]$. *Då gäller att*

$$\int_a^b \alpha(x)g(x)dx = G(b)\alpha(b) - G(a)\alpha(a) - \int_a^b G d\alpha.$$

Med dessa verktyg kan vi bevisa kapitlets huvudsats.

Sats 5.14. *Om*

$$|r(x)| < x^{\frac{1}{2}+a},$$

där $0 < a < \frac{1}{2}$, *så saknar zetafunktionen nollställen i halvplanet* $\sigma > \frac{1}{2} + a$. *Speciellt, om antagandet gäller för alla* $a \in (0, \frac{1}{2})$ *så är Riemannhypotesen sann.*

Bevis. Anta att $\operatorname{Re} s = \sigma > 1$. I beviset för Sats 4.16 har vi visat att

$$\log \zeta(s) = \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{np^{ns}}.$$

Eftersom serien konvergerar absolut kan vi byta ordning på termerna och vi erhåller att

$$\log \zeta(s) = \sum_p \frac{1}{p^s} + \frac{1}{2} \sum_p \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{3} \sum_p \frac{1}{p^{3s}} + \cdots \tag{5.15}$$

Nu låter vi $s \to 1$. I punkten $s = 1$ har zetafunktionen en första ordningens pol med residyn 1, och

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \mathfrak{B}(s-1),$$

där $\mathfrak{B}$ är analytisk kring $s = 0$. Vänstra sidan i (5.15) går alltså mot ∞ då $s \to 1$. Den andra termen i (5.15) konvergerar då $\sigma > 1/2$, den tredje termen konvergerar då $\sigma > 1/3$ osv. Alla termer, förutom den första, på högra sidan av (5.15) konvergerar alltså i halvplanet $\sigma > 1/2$, och deras summa är ändlig eftersom

$$\sum_p \left| \frac{1}{p^{ks}} \right| = \sum_p \frac{1}{p^{k\sigma}} < \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^{k\sigma}} = \Big/_{2}^{\infty} \frac{1}{1-k\sigma} x^{1-k\sigma} = \frac{1}{(k\sigma-1)2^{k\sigma-1}} \quad (k\sigma > 1)$$

och serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{(k\sigma-1)}}$ konvergerar. Om vi betecknar

$$f(s) = \frac{1}{2} \sum_p \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{3} \sum_p \frac{1}{p^{3s}} + \cdots \tag{5.16}$$

får vi enligt (5.15) att

$$\log \zeta(s) = \sum_p \frac{1}{p^s} + f(s). \tag{5.17}$$

Nu vill vi fortsätta den första termen

$$\varphi(s) = \sum_p \frac{1}{p^s}$$

analytiskt till vänster om linjen $\sigma = 1$.

Vi börjar med att låta $s \in \mathbb{R}$ och $s > 1$. Vi kan uttrycka funktionen $\varphi(s)$ som en Stieltjes-integral

$$\varphi(s) = -\int_2^\infty \pi(x) dx^{-s}, \tag{5.18}$$

eftersom

$$\begin{aligned} -\int_2^\infty \pi(x) dx^{-s} &= -\sum_{n=1}^\infty \int_{p_n}^{p_{n+1}} \pi(x) dx^{-s} = -\sum_{n=1}^\infty n \int_{p_n}^{p_{n+1}} dx^{-s} \\ &= \sum_{n=1}^\infty n \left(p_n^{-s} - p_{n+1}^{-s} \right) = p_1^{-s} - p_2^{-s} + 2(p_2^{-s} - p_3^{-s}) + 3(p_3^{-s} - p_4^{-s}) + \dots \\ &= p_1^{-s} + p_2^{-s} + p_3^{-s} + \dots = \sum_{n=1}^\infty p_n^{-s}. \end{aligned}$$

Då vi substituerar $\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + r(x)$ i (5.18) erhåller vi att

$$\varphi(s) = -\int_2^\infty \mathrm{Li}(x) dx^{-s} - \int_2^\infty r(x) dx^{-s},$$

och då vi integrerar den första termen partiellt får vi att

$$\varphi(s) = \int_2^\infty x^{-s} d\,\mathrm{Li}(x) - \int_2^\infty r(x) dx^{-s}.$$

Definitionen för $\mathrm{Li}(x)$ och Sats 5.13 ger att

$$\varphi(s) = \int_2^\infty \frac{dx}{x^s \log x} + s \int_2^\infty \frac{r(x)}{x^{s+1}} dx. \tag{5.19}$$

Funktionen

$$u(s) = \int_2^\infty \frac{dx}{x^s \log x} \tag{5.20}$$

är analytisk i halvplanet $\sigma > 1$ och

$$\begin{aligned} u'(s) &= -\int_2^\infty \frac{dx}{x^s} = \frac{2^{1-s}}{1-s} = \frac{1}{1-s} e^{(1-s)\log 2} \\ &= \frac{1}{1-s} \left(1 + (1-s)\log 2 + \dots \right) = -\frac{1}{s-1} + \mathfrak{B}(s-1), \end{aligned}$$

där $\mathfrak{B}$ är hel. Observera att vi kan derivera integralen p.g.a. absolut konvergens. I halvplanet $\sigma > 1$ kan vi alltså uttrycka $u(s)$ som

$$u(s) = \log \frac{1}{s-1} + H(s), \tag{5.21}$$

där $H(s)$ är en hel funktion. Enligt ekvationerna (5.17)-(5.21) är alltså

$$\log \zeta(s) = \log \frac{1}{s-1} + H(s) + f(s) + s \int_2^\infty \frac{r(x)}{x^{s+1}} dx,$$

vilket vi kan skriva om som

$$\log\left(\zeta(s)(s-1)\right) = s \int_2^\infty \frac{r(x)}{x^{s+1}} dx + H(s) + f(s). \tag{5.22}$$

Formeln (5.22) gäller då $s \in \mathbb{R}$ och $s > 1$.

Nu vill vi undersöka om (5.22) gäller för $s \in \mathbb{C}$. Funktionen $H(s) + f(s)$ är analytisk i halvplanet $\sigma > 1/2$. Funktionen $\zeta(s)(s-1)$ är hel varav dess logaritm $\log\left(\zeta(s)(s-1)\right)$ är analytisk där $\zeta(s) \neq 0$. Vi visar att den första termen på högra sidan av (5.22), d.v.s.

$$R(s) = s \int_2^\infty \frac{r(x)}{x^{s+1}} dx, \tag{5.23}$$

är analytisk då

$$\sigma > \frac{1}{2} + a. \tag{5.24}$$

Enligt antagandet i Sats 5.14 är $x \mapsto r(x)/x^{s+1}$ integrerbar eftersom om

$$\left| \frac{r(x)}{x^{s+1}} \right| < \frac{x^{1/2+a}}{x^{\sigma+1}} = x^{-\sigma-1/2+a},$$

så konvergerar integralen

$$\int_2^\infty x^{-\sigma-1/2+a} dx$$

absolut i halvplanet

$$\sigma \geq \sigma_0 > \frac{1}{2} + a.$$

$R(s)$ är alltså analytisk i halvplanet (5.24). Det följer att (5.22) gäller i halvplanet $\sigma > 1/2 + a$, och att funktionen $\zeta(s)$ saknar nollställen i detta halvplan.

Om antagandet gäller för alla $a > 0$ så kan $\zeta(s)$ inte ha nollställen till höger om linjen $\sigma = 1/2$. Speciellt implicerar Riemanns funktionalekvation (Sats 3.41) att antagandet implicerar att Riemannhypotesen gäller.

□

Det går att visa att även den motsatta implikationen gäller, men vi har ovan visat enbart den kanske intressantare riktningen, d.v.s. påståendet som kunde lämpa sig för att bevisa RH. Se t.ex. [Edw] kap. 5.5 för den motsatta riktningen.

Bilaga A

Bilaga: Det finns oändligt många primtal

Sats A.1. *Det finns oändligt många primtal.*

Bevis. Anta att det finns ett ändligt antal primtal $p_1, \ldots, p_k$. Betrakta talet $a = p_1 \cdots p_k + 1$. Inget av talen $p_1, \ldots, p_k$ delar a, ty $a \equiv 1 \pmod{p_i}$ för alla $i = 1, \ldots, k$. Detta innebär att det finns minst ett primtal till, ty alla naturliga tal kan uttryckas entydigt som en produkt av primtal. □

Följande resultat härstammar från Euler, men vi presenterar Erdös bevis ur [AZ].

Sats A.2. *Låt $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, ...\}$ vara mängden av primtal i växande ordning. Då har vi att*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k} = \infty.$$

Bevis. Låt $p_1, p_2, \ldots$ vara följden av primtal i växande ordning, och antag att $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k}$ konvergerar. Då existerar ett heltal k för vilket $\sum_{i \geq k+1} \frac{1}{p_i} < \frac{1}{2}$. Låt $p_1, \ldots, p_k$ vara de *små* primtalen och låt $p_{k+1}, p_{k+2}, \ldots$ vara de *stora* primtalen. För varje godtyckligt naturligt tal N gäller alltså att

$$\sum_{i \geq k+1} \frac{N}{p_i} < \frac{N}{2}. \tag{A.3}$$

Låt $N_s \in \mathbb{N}$ vara antalet positiva heltal $n \leq N$ som är delbara med minst ett stort primtal och låt $N_l \in \mathbb{N}$ vara antalet positiva heltal $n \leq N$ som har enbart små delare. Vi visar att för ett lämpligt valt N gäller att

$$N_s + N_l < N,$$

vilket är en motstridighet i och med att vi enligt definitionen borde få att $N_s + N_l = N$.

För att uppskatta N_s noterar vi att $\lfloor \frac{N}{p_i} \rfloor = \max\{m \in \mathbb{N} | m \leq \frac{N}{p_i}\}$ räknar de positiva heltalen $n \leq N$ som är multipler av p_i då $i \geq k+1$. Om $m = \lfloor \frac{N}{p_i} \rfloor \leq \frac{N}{p_i} < m+1$ får vi alltså att $(m+1)p_i > N$ och $\{p_i, 2p_i, \ldots, mp_i\}$ hör till de stora primtalen. Enligt (A.3) får vi nu att

$$N_s \leq \sum_{i \geq k+1} \lfloor \frac{N}{p_i} \rfloor < \frac{N}{2}. \tag{A.4}$$

Nu betraktar vi N_l. Vi skriver om varje $n \leq N$ som enbart delas av små primtal i formen $n = a_n b_n^2$, där a_n inte innehåller någon kvadrat. Varje a_n är alltså en produkt av *olika* små primtal och vi noterar att det finns exakt 2^k olika tal a_n. Speciellt om $b_n \leq \sqrt{n} \leq \sqrt{N}$ noterar vi att det existerar högst $\sqrt{N}$ olika tal b_n^2, vilket ger att

$$N_l \leq 2^k \sqrt{N}.$$

I och med att (A.4) gäller för varje N räcker det att välja ett tal N för vilket $2^k \sqrt{N} \leq \frac{N}{2}$, d.v.s. $\sqrt{N} > 2^{k+1}$. $\square$

Litteraturförteckning

[Ahl] L. V. Ahlfors: Complex Analysis, second edition, McGraw-Hill, 1966.

[AZ] M. Aigner, G. Ziegler: Proofs from The Book, Springer, 2004.

[Apo] T. M. Apostol: Introduction to Analytic Number Theory, Springer-Verlag, 1976.

[Ast] K. Astala: Funktioteoria I, kursmaterial, Helsingfors universitet, 2009.

[CIS] B. Conrey, H.Iwaniec, K. Soundarajan: Critical zeroes of Dirichlet L-functions, arXiv:1105.1177v1 [math.NT].

[Edw] H. M. Edwards: Riemann's Zeta Function, Dover, 1974.

[Ford] K. Ford: Zero-free regions for the Riemann zeta function, http://www.math.uiuc.edu/~ford/wwwpapers/zeros.pdf

[Ivic] A. Ivić: On some reasons for doubting the Riemann hypothesis, arXiv:math/0311162v1 [math.NT].

[Jones] F. Jones: Lebesgue Integration on Euclidean Space, revised edition, Jones and Bartlett, 2000.

[Koch] N. F. H. von Koch: Sur la distribution des nombres premiers, Acta Mathematica, 1901.

[LeV] W. J. LeVeque: Fundamentals of Number Theory, Dover, 1996.

[Nev] R. Nevanlinna, V. Paatero: Funktioteoria, Otava, 1963.

[Rud] W. Rudin: Principles of Mathematical Analysis, third edition, McGraw-Hill, 1976.

[Sak] E. Saksman: Complex Analysis II, kursmaterial, Helsingfors universitet, 2012.

[Scho] L. Schoenfeld: Sharper bounds for the Chebyshev functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$, Mathematics of Computation 30, 1976.

[Tit48] E. C. Titchmarsh: Introduction to the theory of Fourier Integrals, Oxford at the Clarendon Press, 1948.

[Tit51] E. C. Titchmarsh: The theory of the Riemann Zeta-Function, Oxford at the Clarendon Press, 1951.

[Zetagrid] www.zetagrid.net